PREDGOVOR

„Zbirka rešenih zadataka iz Poslovne statistike“ – prvo izdanje namenjena je pre svega studentima Visoke poslovne škole strukovnih studija u Leskovcu kao deo literature za pripremu ispita iz Poslovne statistike. Zbirka je prilagođena udžbeniku „Poslovna statistika“-drugo izmenjeno i dopunjeno izdanje, autora prof. dr Milene Marjanović i Kristine Spasić, M.Sc. koji je napisan u skladu sa nastavnim planom i programom za predmet Poslovna statistika. Zbirku mogu koristiti i studenti srodnih visokoškolskih institucija društvenog usmerenja, ali i svi oni koji u istraživačkom radu imaju potrebe za metodama statističke analize.

Leskovac, 2015. Autori

Sadržaj

1. Tabelarno prikazivanje statističkih podataka, deskriptivne mere i mere disperzije i varijacije

1.1. Izračunate i pozicione srednje vrednosti

1. Podaci o visini zarada u hiljadama 40 slučajno odabranih zaposlenih u jednom preduzeću su:

90 90 110 110 110 160 160 160 160 160 210 210 210 210 210 210 210 210 260 260 260 260 260 260 260 260 260 310 310 310 310 310 310 310 360 360 360 360 410 410

Dokaži: $\mathrm{H} \leq G \leq \overline{\mathrm{X}}$**, odredi Me i Mo.**

Rešenje:

S obzirom na to da imamo nekoliko vrednosti obeležja koje se ponavljaju za grupisanje podataka ovakvog tipa koristićemo prostu distribuciju frekvencije. Svaku vrednost obeležja, od najmanje do najveće ređamo u koloni xi (Visina zarada), dok u koloni fi (Broj zaposlenih) beležimo koliko puta se javlja svaka vrednost obeležja (vidi tabelu ispod).

Visina zarada (xi)	Broj zaposlenih (fi)	x*f	f/x	logx	f*logx	Kumulativ „ispod“
90	2	180	0,022	1,9542	3,9084	2
110	3	330	0,0273	2,0414	6,1242	5
160	5	800	0,0313	2,2041	11,0205	10
210	8	1680	0,0381	2,3222	18,5776	18
260	9	2340	0,0346	2,41497	21,735	27
310	7	2170	0,0226	2,4914	17,4398	34
360	4	1440	0,0111	2,5563	10,2252	39
410	2	820	0,0049	2,6128	5,2256	40
Σ	40	9760	0,1919	-	94,26	-

Položaj Modusa je u onom redu u kome je najveća frekvencija f=9. Pošto je u pitanju prosta distribucija frekvencije Modus je vrednost obeležja sa najvećom frekvencijom, tako da je ovde modus Mo=260 što znači da najveći broj zaposlenih ima zaradu 260 (u hiljadama).

Položaj Medijane određujemo prema formuli (n+1)/2 jer je u pitanju paran broj podataka. Položaj Medijane je ovde (n+1)/2=(40+1)/2=41/2=20,5 član. Opet formiramo kolonu „Kumulativ ispod“. 20,5 član je sadržan u prvom većem broju od sebe (27), tako da u tom redu tražimo Medijanu. Pošto je u pitanju prosta distribucija frekvencije, vrednost medijane predstavlja ona vrednost obeležja koja se nalazi u Medijalnom redu. Ovde je Medijana Me=260 što znači da polovina zaposlenih ima visinu zarada manju od 260 hiljada, a druga polovina veću. Modus i Medijana mogu biti iste vrednosti, kao što je slučaj u ovom zadatku, ali se mogu i razlikovati.

U zadatku se dalje traži da dokažemo da važi: $H \le G \le \bar{X}$. Reč je o izračunatim srednjim vrednostima na osnovu grupisanih podataka. Za svaku od ovih srednjim vrednosti imamo adekvatnu formulu:

Aritmetička sredina: $\bar{X} = \frac{\sum fixi}{N=\sum fi}$ Harmonijska sredina: $H=\frac{N}{\sum\frac{fi}{xi}}$

Geometrijska sredina:

$$G=\sqrt[N]{\frac{\sum f * \log x}{\sum f}}$$

Za aritmetičku sredinu treba nam zbir kolone fi*xi. Pošto nemamo tu kolonu otvaramo je, množimo u svakom redu frekvencije sa vrednošću obeležja, na kraju kolone dobijamo zbir proizvoda. Tako da je u našem primeru $\sum fixi$ =9760. Aritmetička sredina iznosi:

$\bar{X}=\frac{9760}{40} = 244$ Prosečna vrednost zarade za 40 zaposlenih iznosi 244 hiljada.

Za harmonijsku sredinu nam je potreban zbir kolone fi/xi. Pošto nemamo tu kolonu otvaramo je, delimo frekvencije sa vrednošću obeležja po redovima, na kraju kolone dobijamo zbir proizvoda. U našem primeru Σfi/xi=0,1919. Harmonijska sredina iznosi:

$H=\frac{40}{0,1919}=208,44$ Prosečna vrednost zarade za 40 zaposlenih iznosi 208,44 hiljada.

Za geometrijsku sredinu nam je neophodan zbir kolone fi*logxi. Najpre otvaramo kolonu logxi, jer je u pitanju složena funkcija. Logaritamske vtednosti kolone xi dobijamo pomoću digitrona, a potom otvaramo kolonu fi*logxi u kojoj množimo redom frekvencije sa dobijenim vrednostima logxi. Na kraju kolone dobijamo zbir koji nam je potreban, u našem primeru je to: Σfi*logxi=94,26. Geometrijska sredina iznosi:

$$G=\sqrt[N]{\frac{\sum f * \log x}{\sum f}}=\sqrt[N]{\frac{94,26}{40}}=\sqrt[N]{2,3565}=227,25$$

Prosečna vrednost zarade za 40 zaposlenih iznosi 227,25 hiljada.

$\sqrt[N]{2,3565}$ je antilog i računa se pomoću digitrona. U pitanju je inverzna funkcija funkcije log.

208,44≤227,25≤244 Dokazali smo da je $H \leq G \leq \overline{X}$.

2. Podaci o izdacima za kultura 30 odabranih porodica dati su u zadatku (u 000).

70 70 90 90 140 140 140 140 180 180 180 180 240 240 240 240 240 240 280 280 280 280 300 300 300 350 350 350 400 400.

Na osnovu proste distributivne frekvencije koju ćeš formirati:

a) dokaži da važi: $H \leq G \leq \overline{X}$; **b) odredi Me i Mo i**

Rešenje:

Izdaci za kulturu (xi)	Broj porodica (fi)	x*f	f/x	logx	f*logx	Kumulativ „ispod“
70	2	140	0,025	1,845	3,690	2
90	2	180	0,022	1,954	3,908	4
140	4	560	0,029	2,146	8,585	8
180	4	720	0,022	2,255	9,021	12
240	6	1440	0,025	2,380	14,281	18
280	4	1120	0,014	2,447	9,789	22
300	3	900	0,01	2,477	7,431	25
350	3	1050	0,009	2,544	7,632	28
400	2	800	0,005	2,602	5,204	30
Σ	30	6910	0,164	-	69,541	-

Položaj Me=(n+1)/2=31/2=15,5 (peti red) Me=240 Mo=240

Me: Polovina porodica ima izdatke za kulturu manje od 240 hiljada dinara, a druga polovina veće.

Mo: Najveći broj porodica ima izdatke za kulturu 240 hiljada dinara.

$$\overline{X}=\frac{\sum xf}{\sum f}=\frac{6910}{30}=230,33 \quad H=\frac{\sum f}{\sum \frac{f}{x}}=\frac{30}{0,164}=182,93$$

$$G = \sqrt{\frac{\sum f * \log x}{\sum f}} = \sqrt{\frac{69{,}541}{30}} = \sqrt{2{,}31803} = 207{,}98$$

Prosečni izdaci za kulturu za 30 porodica iznose: 230,33 ($\bar{X}$); 182,93 (H) i 207,98 (G) hiljada dinara.

$$182{,}93 \leq 207{,}98 \leq 230{,}33$$

3. Mesečna potrošnja hleba u kilogramima u 30 domaćinstava iznosila je:
58,6 29,6 30,8 40,6 11,3 30,9 52,4 33,6 29,9 12,6 16,8 37,6 34,5 45,1 20,1 46,3 42,4 54,5 48,2 10 44,6 49,8 70 28,9 59,9 49,6 39,2 39,8 25,7 64,3.

Na osnovu intervalne serije odredi Me i Mo i $\bar{x}$.

Rešenje:

Da bi grupisali podatke koristimo Strugesovo pravilo: K=1+3,3logN da bi odredili broj redova tabele i $i = \frac{xmax - xmin}{k}$ da bi odredili širinu intervala. U ovom zadatku imamo 30 podataka dakle veličina uzorka je n=30.

$$K = 1 + 3{,}3\log N = 1 + 3{,}3\log 30 = 1 + 3{,}3 * 1{,}477 = 1 + 4{,}87 = 5{,}87 \approx 6$$

$$i = \frac{xmax - xmin}{k} = \frac{70 - 10}{6} = \frac{60}{6} = 10$$ širina intervala

Nakon toga možemo grupisati podatke u tabeli. Krećemo od najmanje vrednosti obeležja, a to je xmin=10 i dodajemo širinu intervala 10 da bi odredili gornju granicu intervala, to je 20. Sledeći interval krećemo od prvog većeg broja 20,1 i formiramo intervale za šest redova (vidite tabelu). Kada formiramo intervale pristupamo prebrojavanju vrednosti obeležja za svaki interval dok ne rasporedimo svih 30 podataka. Tako prvom intervalu od 30 datih brojeva pripada 4, drugom intervalu 5, trećem 7, četvrtom 8, petom 4, šestom 2 broja. Ukupan zbir kolone f (frekvencija ili broj ponavljanje svake vrednosti obeležja) je jednak veličini uzorka, u ovom slučaju n=30.

Potrošnja hleba (xi)	Broj domaćinstava (fi)	Kumulativ „ispod“
10 – 20	4	4
20,1 – 30	5	9
30,1 – 40	7	16
40,1 – 50	8	24
50,1 – 60	4	28
60,1 - 70	2	30
Σ	30	-

Kod intervalne serije podataka za određivanje pozicionih srednjih vrednosti koristimo formule:

Za Modus

$$Mo = l + \frac{f2 - f1}{(f2 - f1)+(f2-f3)} *i$$

Za Medijanu

$$Me = l + \frac{\frac{n}{2} - \Sigma fi<m}{fm} *i$$

Da bi odredili Modus (vrednost obeležja sa najvećom frekvencijom) moramo odrediti položaj Modusa. Položaj Modusa je u onom redu u kojem se nalazi najveća frekvencija. U ovom slučaju je to fi=8. najveća frekvencija se nalazi u intervalu od 40,1 do 50. Donja granica intervala je *l*=40,1. Frekvencija modalnog intervala je f2=8, f1 je frekvencija iznad (f1=7), a f3 je frekvencija ispod (f3=4).

$$Mo = l + \frac{f2 - f1}{(f2 - f1)+(f2-f3)} *i = 40{,}1 + \frac{8-7}{(8-7)+(8-4)} * 10 \quad Mo=42{,}1$$

U ovom primeru Modus je 42,1 što znači da najveći broj domaćinstava ima potrošnju hleba 42,1 kg.

Položaj Medijane određujemo pomoću formule n/2 (za neparan broj podataka) i (n+1)/2 kada imamo paran broj podataka. U ovom primeru n=30 (paran broj) tako da koristimo drugu formulu. Položaj Medijane je (n+1)/2=(30+1)/2=31/2=15,5 što znači da je položaj medijane između 15. i 16. člana kod podataka koji su poređani po veličini. Da bi lakše odredili položaj Medijane formiramo kolonu „Kumulativ ispod" (vidite tabelu). Kolonu „Kumulativ ispod" dobijamo tako što sabiramo frekvencije po koracima. U prvom redu je 4, u drugom redu 9 (4+5), u trećem redu je 16 (9+7), u četvrtom redu je 24 (16+8), u petom redu je 28 (24+4) i u poslednjem redu je 30 (28+2). Član 15,5 sadržan je u trećem intervalu os 30,1 do 40 (kumulativ ispod je 16, prvi veći broj od 15,5) tako da je treći interval medijalni interval. L je donja granica medijalnog intervala i iznosi L=30,1. Fm je frekvencija medijalnog intervala i iznosi fm=7, a Σfi<m je zbir frekvencija do medijalnog intervala i dobijamo ga kada sakupimo kolonu f do reda u kome tražimo medijanu, pa je ovde Σfi<m =9. Na osnovu ovih podataka računamo Medijanu:

$$Me = l + \frac{\frac{n}{2} - \Sigma fi<m}{fm} *i = 30{,}1 + \frac{\frac{30}{2} - 9}{7} * 10 \quad Me=38{,}67$$

U ovom primeru Medijana iznosi 38,67 što znači da polovina domaćinstava ima potrošnju hleba manju od 38,67kg, a druga polovina veću.

Izračunata srednja vrednost je aritmetička sredina: $\overline{X} = \frac{\sum fixi}{N=\sum fi}$. Pošto u ovom primeru imamo intervalnu seriju podataka te zbog toga u koloni xi nije jedna vrednost već dve, da bi mogli da izračunate aritmetičku redinu podrebno je da odredimo sredinu intervala xs. Sredina intervala je broj koji se koristi umesto kolone xi (kod intervalne serije podataka) za izračunavanje onih parametara koji se računaju na osnovu vrednosti obeležja. U svim formulama gde se traže vrednosti iz kolone xi uzimaćemo vrednosti iz kolone xs. Kolonu xs dobijamo tako što saberemo gornju i donju granicu intervala i taj zbir podelimo sa 2. za prvi red xs=(10+20)/2=15. Za drugi red xs=(20+30)/2=25. Za treći red xs=(30+40)/2=35. Za četvrti red xs=(40+50)/2=45. Za peti red xs=(50+60)/2=55 i za šesti red xs=(60+70)/2=65.

Potrošnja hleba (xi)	Broj domaćinstava (fi)	Kumulativ „ispod“	xs	xs*fi
10 – 20	4	4	15	60
20,1 – 30	5	9	25	125
30,1 – 40	7	16	35	245
40,1 – 50	8	24	45	360
50,1 – 60	4	28	55	220
60,1 - 70	2	30	65	130
Σ	30	-	-	1140

Za aritmetičku sredinu treba nam zbir kolone fi*xi. Umesto kolone xi uzimaćemo vrednosti kolone xs. Pošto nemamo kolonu fi*xi otvaramo je, množimo u svakom redu frekvencije sa vrednošću obeležja, na kraju kolone dobijamo zbir proizvoda. Tako da je u našem primeru Σfixs=1140. Aritmetička sredina iznosi:

$\overline{X} = \frac{\Sigma xf}{\Sigma f} = \frac{1140}{30} = 38$ Prosečna potrošnja hleba za 30 domaćinstava iznosi 38 kg.

Harmonijsku i geometrijsku sredinu računamo na isti način kao kod proste distribucije frekvencija s tim što umesto vrednosti kolone xi uzimamo vrednosti iz kolone xs. Dakle, u svim formulama xi zamenjujemo vrednostima iz kolone xs.

4. На основу података датих у табели израчунајте $\overline{X}$, Mo и Me и утврди да ли важи једнакост: $\overline{X}$=Mo=Me.

Zarada u 000	20	25	30	33	38	40	45	∑
Br. zaposlenih	5	9	12	15	8	7	7	63

Rešenje:

Mo=33 Najveći broj zaposlenih ima zaradu 33000 dinara.

Položaj Me= n/2=63/2=31,5 (četvrti red u koloni kumulativ „ispod”)

Me=33 Polovina zaposlenih ima zaradu manju od 33000 dinara, a druga polovina veću.

Zarada u 000 (xi)	Br. zaposlenih (fi)	xi*fi	Kumulativ „ispod”
20	5	100	5
25	9	225	14
30	12	360	26
33	15	495	41
38	8	304	49
40	7	280	56
45	7	315	63
Σ	63	2079	-

$$\overline{X} = \frac{\Sigma xf}{\Sigma f} = \frac{2079}{63} = 33$$

Prosečna zarada za 33 radnika iznosi 33000 dinara. $\overline{X}$=Mo=Me

5. Ukupno angažovana osnovna sredstva u jednom preduzeću iznose 120 mil. dinara. U osnovna sredstva sa vekom trajanja od 20 godina uloženo je 60 mil. dinara; u proizvodne mašine sa vekom trajanja od 8 godina uloženo je 40 mil. dinara., a u obrtna sredstva sa polugodišnjim obrtom 20 mil. dinara. Izračunaj prosečno vreme obrta ukupno angažovanih sredstava.

Rešenje:

Pošto je u pitanju vremenska serija, jer je obeležje vek trajanja (traži se prosečno vreme obrta) koristimo harmonijsku sredinu.

$$H = \frac{n}{\Sigma \frac{fi}{xi}} = \frac{120000000}{\frac{60000000}{20} + \frac{40000000}{8} + \frac{20000000}{0,5}} = \frac{120000000}{3000000+5000000+40000000}$$

$$H = \frac{120000000}{48000000} = 2,5$$

Prosečno vreme obrta ukupno angažovanih sredstava je 2,5 godine.

6. Ukupno angažovana sredstva jednog preduzeća iznose 150 miliona dinara. U osnovna sredstva u trajanju od 15 godina uloženo je 75 miliona. U proizvodne mašine sa vekom trajanja od 5 godina 50 miliona, a 25 miliona u obrtna sredstva sa polugodišnjim obrtom. Izračunaj prosečno vreme obrta ukupno angažovanih sredstava u ovo preduzeće.

Rešenje:

$$H=\frac{n}{\Sigma\frac{fi}{xi}}=\frac{150000000}{\frac{75000000}{15}+\frac{50000000}{5}+\frac{25000000}{0,5}}=\frac{150000000}{5000000+1000000+50000000}$$

$$H=\frac{150000000}{56000000}=2{,}68$$

Prosečno vreme obrta ukupno angažovanih sredstava je 2,68 godine

7. Ukupno angažovana sredstva jednog preduzeća iznose 200 hiljada dinara. U osnovna sredstva u trajanju od 20 godina uloženo je 100 hiljada. U proizvodne mašine sa vekom trajanja od 5 godina 60 hiljada, a 40 hiljada u obrtna sredstva sa polugodišnjim obrtom. Izračunaj prosečno vreme ukupno angažovanih sredstava u ovo preduzeće.

Rešenje:

$$H=\frac{n}{\Sigma\frac{fi}{xi}}=\frac{200000}{\frac{100000}{20}+\frac{60000}{5}+\frac{40000}{0,5}}=\frac{200000}{5000+12000+80000}$$

$$H=\frac{200000}{97000}=2{,}06$$

Prosečno vreme obrta ukupno angažovanih sredstava je 2,06 godine

8. На основу података датих у табели израчунајте $\overline{x}$, Mo и Me и утврди да ли важи једнакост: $\overline{x}$=Mo=Me.

Zarada u 000	15	19	20	25	28	30	35	40	∑
Br. zaposlenih	8	10	7	15	18	15	13	11	97

Rešenje:

Mo=28 Najveći broj zaposlenih ima zaradu 28000 dinara.

Položaj Me= n/2=97/2=48,5 (peti red u koloni kumulativ „ispod”)
Me=28   Polovina zaposlenih ima zaradu manju od 28000 dinara, a druga polovina veću.

Zarada u 000 (xi)	Br. zaposlenih (fi)	xi*fi	Kumulativ „ispod”
15	8	120	8
19	10	190	18
20	7	140	25
25	15	375	40
28	18	504	58
30	15	450	73
35	13	455	86
40	11	440	97
Σ	97	2674	-

$$\overline{X} = \frac{\Sigma xf}{\Sigma f} = \frac{2674}{97} = 27,57 \approx 28$$

Prosečna zarada za 97 zaposlenih iznosi 28000 dinara.

$\overline{x}$=Mo=Me

9. Dati su podaci o mesečnoj potrošnji po domaćinstvima u hiljadama.

40 44 30 31 35 42 30 32 41 42 33 39 25 24
27 40 41 31 36 38 31 35 31 21 28 25 32 33

Na osnovu intervalne serije podataka izračunajte Mo, Me i $\overline{X}$.

Rešenje:

K=1+3,3logn=1+3,3log28=1+3,3*1,447=1+4,77=5,77≈6

$$i = \frac{xmax - xmin}{k} = \frac{44 - 21}{6} = \frac{23}{6} = 3,83 \approx 4$$

Mesečna potrošnja (xi)	Broj domaćinstava (fi)	xs	ss*f	Kumulativ „ispod“
21 – 25	4	23	92	4
25,1 – 29	2	27	54	6
29,1 – 33	10	31	310	16
33,1 – 37	3	35	105	19
37,1 – 41	6	39	234	25
41,1 – 45	3	42	126	28
Σ	28	-	921	-

$$Mo = l + \frac{f2 - f1}{(f2 - f1)+(f2-f3)} * i = 29{,}1 + \frac{10-2}{(10-2)+(10-3)} * 4 \quad Mo=31{,}23$$

Najveći broj domaćinstava ima mesečnu potrošnju 31230 dinara

$$Me = l + \frac{\frac{n}{2} - \Sigma fi{<}m}{fm} * i = 29{,}1 + \frac{\frac{28}{2} - 6}{10} * 4 \quad Me=32{,}89$$

Polovina domaćinstava ima potrošnju manju od 32890 dinara, a druga polovina veću.

$$\overline{X} = \frac{\Sigma xf}{\Sigma f} = \frac{921}{28} = 32{,}89$$

Prosečna potrošnja za 28 domaćinstava iznosi 32890 dinara

10. Na osnovu grupisane serije podataka o potrošnji salame po domaćinstvu u vidu proste distribucije frekvencija izračunajte Mo, Me i dokažite da važi H<G<$\overline{X}$.

100 150 95 200 300 95 100 150 380 200 100 250 150
200 100 300 300 250 300 200 300 300 250 250 300 150

Rešenje:

x	f	xf	f/x	logx	flogx	Kum. ispod
95	2	190	0,021	1,978	3,96	2
100	4	400	0,040	2,000	8,00	6
150	4	600	0,027	2,176	8,70	10
200	4	800	0,020	2,301	9,20	14
250	4	1000	0,016	2,398	9,59	18
300	7	2100	0,023	2,477	17,34	25
380	1	380	0,003	2,580	2,58	26
$\sum$	26	5470	0,150		59,38	-

Mo=300 Najveći broj domaćinstava ima potrošnju salame 300 kg.

Položaj Me=(n+1)/2=(26+1)/2=27/2=13,5 (četvrti red u koloni kumulativ „ispod“)

Me=200 Polovina domaćinstava ima potrošnju salame manju od 200kg, a druga polovina veću.

$$\bar{X} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{5470}{26} = 210{,}38 \qquad H = \frac{\sum f}{\sum \frac{f}{x}} = \frac{26}{0{,}150} = 173{,}33$$

$$G = N\sqrt{\frac{\sum f * \log x}{\sum f}} = N\sqrt{\frac{59{,}38}{26}} = N\overline{2{,}28} = 190{,}55$$

Prosečna potrošnja salame po domaćinstvu iznosi 210,38 ($\bar{X}$); 173,33 (H) i 190,55 (G).

11. Podaci o potrošnji ulja za 36 odabranih domaćinstava dati su u zadatku.

50 50 50 80 80 80 80 90 90 90 90 90 90 110 110 110 110 110 110 110 150 150 150 150 150 180 180 180 200 200 200 200 220 220 220 220.

Na osnovu proste distributivne frekvencije koju ćeš formirati:

a) dokaži da važi: $H \leq G \leq \bar{X}$; **b) odredi Me i Mo.**

Rešenje:

Potrošnja ulja (xi)	Broj domaćinstava (fi)	x*f	f/x	logx	f*logx	Kumulativ „ispod“
50	3	150	0,06	1,699	5,097	3
80	4	320	0,05	1,903	7,612	7
90	6	540	0,06	1,954	11,721	13
110	7	770	0,064	2,041	14,287	20
150	5	750	0,03	2,176	10,88	25
180	3	540	0,017	2,255	6,765	28
200	4	800	0,02	2,301	9,204	32
220	4	880	0,018	2,342	9,368	36
Σ	36	4750	0,319	-	74,937	-

Mo=110 Najveći broj domaćinstava ima potrošnju ulja 110 litara.

Položaj Me=(n+1)/2=(36+1)/2=37/2=18,5 (četvrti red u koloni kumulativ „ispod“)

Polovina domaćinstava ima potrošnju ulja manju od 110 litara, a druga polovina veću.

$$\overline{X} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{4750}{36} = 131{,}94 \qquad H = \frac{\sum f}{\sum \frac{f}{x}} = \frac{36}{0{,}319} = 112{,}85$$

$$G = \sqrt{\frac{\sum f * \log x}{\sum f}} = \sqrt{\frac{74{,}937}{36}} = \sqrt{2{,}08158} = 120{,}67$$

$$112{,}85 \leq 120{,}67 \leq 131{,}94$$

Prosečna potrošnja salame po domaćinstvu iznosi 131,94 ($\overline{X}$); 112,85 (H) i 120,67 (G).

1.2. Mere disperzije i varijacije

1. Dat je raspored domaćinstava prema potrošnji mesa na bazi uzorka od 49 domaćinstava.

Potrošnja mesa u kg	**3 – 5**	**5 – 7**	**7 – 9**	**9 – 11**	**11 – 13**	**13 – 15**
Broj domaćinstava	**2**	**3**	**7**	**16**	**18**	**3**

Odredi: a) Prosečnu potrošnju mesa. b) Standardnu devijaciju.

Rešenje:

Potrošnja mesa (xi)	Broj domaćinstava (fi)	xs	xs*f	xs^2	$f*xs^2$
3 – 5	2	4	8	16	32
5 – 7	3	6	18	36	108
7 – 9	7	8	56	64	448
9 – 11	16	10	160	100	1600
11 – 13	18	12	216	144	2592
13 – 15	3	14	42	196	588
Σ	49	-	500		5368

a) $\overline{x} = \frac{\sum fixi}{N=\sum fi} = \frac{500}{49} = 10{,}20$

Prosečna potrošnja mesa iznosi 10,20 kg.

b) $\sigma^2 = \frac{\sum_{fixi} 2}{n} - \overline{x}^2 = \frac{5368}{49} - 10{,}2^2 = 109{,}55 - 104{,}04 = 5{,}51$

$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{5{,}51} = 2{,}35$ Minimalno prosečno odstupanje potrošnje mesa od prosečne potrošnje iznosi 2,35 kg.

2. Dat je raspored radnika prema zaradama u dva preduzeća.

Zarade u 000 dinara	**Broj radnika**	
	Preduzeće „A“	**Preduzeće „B“**
Do 2	**15**	**15**
2 – 4	**22**	**17**
4 – 6	**63**	**78**
6 – 8	**15**	**26**
8 – 10	**10**	**18**
10 i više	**3**	**8**

a) U kom preduzeću je veće odstupanje zarada u odnosu na prosečnu zaradu?

Rešenje:

Zarada x	Broj radnika		xs	Xs*fa	Xs*fb	Xs^2	$fa*Xs^2$	$fb*Xs^2$
	fa	fb						
Do 2	15	15	1	15	15	1	15	15
2 – 4	22	17	3	66	51	9	198	153
4 – 6	63	78	5	315	390	25	1575	1950
6 – 8	15	26	7	105	182	49	735	1274
8 – 10	10	18	9	90	162	81	810	1458
10 i više	3	8	11	33	88	121	636	968
Σ	128	162	-	624	888	-	3696	5818

a) $\overline{X}_A = \frac{\sum fixi}{N=\sum fi} = \frac{624}{128} = 4{,}88$ Prosečna zarada u preduzeću A iznosi 4880 din

$\overline{X}_B = \frac{\sum fixi}{N=\sum fi} = \frac{888}{162} = 5{,}48$ Prosečna zarada u preduzeću B iznosi 5480 din

$$A\sigma^2 = \frac{\sum fixi^2}{n} - \overline{X}^2 = \frac{3696}{128} - 4{,}88^2 = 28{,}88 - 23{,}81 = 5{,}07$$

$A\sigma = \sqrt{A\sigma^2} = \sqrt{5{,}07} = 2{,}25$ Minimalno prosečno odstupanje zarade od prosečne zarade iznosi 2250 din.

$$B\sigma^2 = \frac{\sum fixi^2}{n} - \overline{X}^2 = \frac{5818}{162} - 5{,}48^2 = 35{,}91 - 30{,}03 = 5{,}88$$

$B\sigma = \sqrt{B\sigma^2} = \sqrt{5{,}88} = 2{,}42$ Minimalno prosečno odstupanje zarade od prosečne zarade iznosi 2420 din.

$B\sigma > A\sigma$ U preduzeću B veće je odstupanje zarada od prosečne zarade.

3. Dat je raspored radnika prema zaradama u dva preduzeća. U kom preduzeću je veće odstupanje zarada u odnosu na prosečnu zaradu?

Zarade u 000 dinara	**Broj radnika**	
	Preduzeće „A“	**Preduzeće „B“**
Do 2	**15**	**17**
2 – 4	**22**	**17**
4 – 6	**63**	**88**
6 – 8	**15**	**50**
8 – 10	**10**	**30**
10 i više	**3**	**8**
∑	**128**	**210**

Rešenje:

Zarada x	Broj radnika		xs	Xs*fa	Xs*fb	Xs^2	fa*Xs^2	fb* Xs^2
	fa	fb						
Do 2	15	17	1	15	17	1	15	17
2 – 4	22	17	3	66	51	9	198	153
4 – 6	63	88	5	315	440	25	1575	2200
6 – 8	15	50	7	105	350	49	735	2450
8 – 10	10	30	9	90	270	81	810	2430
10 i više	3	8	11	33	88	121	636	968
Σ	128	210	-	624	1216	-	3696	8218

a) $\overline{X}_A = \frac{\sum fixi}{N=\sum fi} = \frac{624}{128} = 4{,}88$ Prosečna zarada u preduzeću A iznosi 4880 din

$\overline{X}_B = \frac{\sum fixi}{N=\sum fi} = \frac{1216}{210} = 5{,}79$ Prosečna zarada u preduzeću B iznosi 5790 din

$A\sigma^2 = \frac{\sum fixi^2}{n} - \overline{X}^2 = \frac{3696}{128} - 4{,}88^2 = 28{,}88 - 23{,}81 = 5{,}07$

$A\sigma = \sqrt{A\sigma^2} = \sqrt{5{,}07} = 2{,}25$ Minimalno prosečno odstupanje zarade od prosečne zarade iznosi 2250 din.

$B\sigma^2 = \frac{\sum fixi^2}{n} - \overline{X}^2 = \frac{8218}{210} - 5{,}79^2 = 39{,}13\text{-}33{,}52 = 5{,}61$

$B\sigma = \sqrt{B\sigma^2} = \sqrt{5{,}61} = 2{,}37$ Minimalno prosečno odstupanje zarade od prosečne zarade iznosi 2370 din.

Bσ>Aσ U preduzeću B veće je odstupanje zarada od prosečne zarade.

4. Dati su sledeći podaci:

80 80 100 100 100 150 150 150 150 150 200 200 200 200 200 200 200 200 250 250 250 250 250 250 250 250 250 300 300 300 300 300 300 300 350 350 350 350 350 400 400.

Odredi koristeći prostu distributivnu frekvenciju koeficijent varijacije (Vx).

Rešenje:

x	f	Kumulativ ispod	xf	X^2	x^2f
80	2	2	160	6400	12800
100	3	5	300	10000	30000
150	5	10	750	22500	112500
200	8	18	1600	40000	320000
250	9	27	2250	62500	562500
300	7	34	2100	90000	630000
350	4	38	1400	122500	490000
400	2	40	800	160000	320000
$\sum$	40	-	9360	-	2477800

$\overline{X} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{9360}{40} = 234$ Prosečna vrednost obeležja iznosi 234.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2 \cdot f}{\sum f} - \overline{X}^2} = \sqrt{\frac{2477800}{40} - 234^2} = \sqrt{61945 - 54756} = \sqrt{7189} = 84,79$$

Minimalno prosečno odstupanje vrednosti obeležja od prosečne vrednosti obeležja iznosi 84,79.

$Vx = \frac{\sigma}{\overline{X}} * 100\% = \frac{84,79}{234} * 100\% = 36,24\%$ Minimalno relativno prosečno odstupanje vrednosti obeležja od prosečne vrednosti obeležja iznosi 36,24%.

5. Na osnovu intervalne serije podataka odredi koliko varira visina studenata u odnosu na prosečnu visinu.

167 150 180 195 200 205 113 167 194 135 210 193 168 183 162 117 154 190 163 170 172 184 185 152 187 167 175 194 180 156 183 112 194.

Rešenje:

x	f	xs	xsf	Xs^2	Xs^2f
113-129	3	121	363	14641	43923
129,1-145	1	137	137	18769	18769
145,1-161	4	153	612	23409	93636
161,1-177	9	169	1521	28561	257049
177,1-193	9	185	1665	34225	308025
193,1 i više	7	201	1407	40401	282807
Σ	33	-	5705	-	1004209

$$\overline{X} = \frac{\Sigma xf}{\Sigma f} = \frac{5705}{33} = 172{,}88$$

Prosečna visina studenata iznosi 172,88.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x^2 * f}{\Sigma f} - \overline{X}^2} = \sqrt{\frac{1004209}{33} - 172{,}88^2} = \sqrt{30430{,}58 - 29887{,}49} = \sqrt{543{,}09} = 23{,}30$$

Minimalno prosečno odstupanje visine studenata od prosečne visine iznosi 23,30.

$$Vx = \frac{\sigma}{\overline{X}} * 100\% = \frac{23{,}33}{172{,}88} * 100\% = 0{,}1348 * 100\% = 13{,}48\%$$

Minimalno relativno prosečno odstupanje visine studenata od prosečne visine iznosi 13,48%.

6. Slučajno odabrani uzorak od 21 prodavnica dao je sledeći rezultat u pogledu mesečnih prihoda u 000 dinara. Odredi:

45 44 30 34 38 42 54 39 43 48 36 49 23 24 28 26 46 41 31 33 36

a) intervalnu seriju podataka i prosečni mesečni prihod.
b) standardnu devijaciju (σ) **v) medijanu (Me).**

Rešenje:
a) K=5 i=6

x	f	xs	Xs^2	F*Xs	F* Xs^2	Kum. ispod
23 – 29	4	26	676	104	2704	4
29,1 – 35	4	32	1024	128	4096	8
35,1 – 41	5	38	1444	190	7220	13
41,1 - 47	5	44	1936	220	9680	18
47,1 i više	3	50	2500	150	7500	21
Σ	21	-	-	792	31200	-

$\overline{X} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{792}{21} = 37{,}71$ Prosečni mesečni prihod iznosi 37710 dinara.

$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2 \cdot f}{\sum f} - \overline{X}^2} = \sqrt{\frac{31200}{21} - 37{,}71^2} = \sqrt{1485{,}71 - 1422{,}04} = \sqrt{63{,}67} = 7{,}98$

Minimalno prosečno odstupanje mesečnog prihoda od prosečnog prihoda iznosi 7980 dinara.

Položaj Me=n/2=21/2=10,5 (treći red)

$\mathrm{Me} = l + \frac{\frac{N}{2} - \sum fi<m}{fm} i, \quad \mathrm{Me} = 35{,}1 + \frac{\frac{21}{2} - 8}{5} * 6, \quad \mathrm{Me} = 35{,}1 + \frac{10{,}5 - 8}{5} * 6,$

$\mathrm{Me} = 35{,}1 + \frac{2{,}5 * 6}{5} = 35{,}1 + 3 = 38{,}1$

Polovina prodavnica ima mesečni prihod veći od 38100, a druga polovina manji.

7. Podaci o potrošnji šećera za 36 odabranih porodica dati su u zadatku.

30 30 30 45 45 70 70 70 70 70 96 96 96 96 100 100 100 120 120 120 120 125 125 125 125 125 125 130 130 130 130 130.

Na osnovu proste distributivne frekvencije koju ćeš formirati:
a) odredi koeficijent varijacije (Vx); **b) odredi Me i Mo**

Rešenje:

x	f	X*f	X^2	X^2*f	Kum. ispod
30	3	90	900	2700	3
45	2	90	2025	4050	5
70	5	350	4900	24500	10
96	4	384	9216	36864	14
100	3	300	10000	30000	17
120	4	480	14400	57600	21
125	6	750	15625	93750	27
130	5	650	16900	84500	32
Σ	32	3094	-	333964	-

a) $\overline{X} = \frac{\sum fixi}{\sum fi} = \frac{3094}{32} = 96{,}69$ Prosečna potrošnja šećera 36 porodica iznosi 96,69 kg.

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma x^2 \cdot f}{\Sigma f}-\overline{x}^2}=\sqrt{\frac{333964}{32}-96{,}69^2}=\sqrt{10436{,}375 - 9348{,}9561}$$

$$\sigma=\sqrt{1087{,}4189}=32{,}976$$

Minimalno prosečno odstupanje potrošnje šećera od prosečne potrošnje šećera iznosi 32,976 kg.

$$V(x)=\frac{\sigma}{\overline{x}} * 100\% = \frac{32{,}976}{96{,}69}=34{,}10\%$$

Minimalno relativno prosečno odstupanje potrošnje šećera od prosečne potrošnje iznosi 34,10%.

b) Položaj Me=(n+1)/2=(32+1)/2=33/2=16,5 (peri red)

Me=100 Polovina porodica ima potrošnju šećera manju od 100 kg, a druga polovina veću.

Mo=125 Najveći broj porodica ima potrošnu šećera 125 kg.

1.3. Mere asimetrije i spljoštenosti

1. Na osnovu podataka o potrošnji brašna po domaćinstvima odredite asimetriju i spljoštenost rasporeda.

Potrošnja brašna	4-6	6-8	8-10	10-12	12-14	14-16	Σ
Br. domaćinstava	7	3	1	2	4	5	22

Rešenje:

Asimetriju rasporeda određujemo na osnovu koeficijenta α_3 koji pokazuje odnos između centralnog momenta trećeg reda i standardne devijacije trećeg stepena. Faormula za izračunavanje je:

$$\alpha_3 = \frac{M^3}{\sigma^3}$$

Spljoštenost rasporeda određujemo pomoću koeficijenta α_4 koji pokazuje odnos između centralnog momenta četvrtog reda i standardne devijacije četvrtog stepena. Formula za izračunavanje je:

$$\alpha_4 = \frac{M^4}{\sigma^4}$$

Za izračunavanje *centralnog momenta k-tog reda* kod grupisanih podataka koristimo sledeću formulu:

$$Mk = \frac{\sum fi(xi-\overline{X})^k}{N}$$

Za *standardnu devijaciju* kod grupisanih podataka koristimo formulu:

$$\sigma^2 = \frac{\sum fi(xi-\overline{X})^2}{N}$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

x	F	xs	f*xs	$x-\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$	$(x-\bar{x})^3$	$(x-\bar{x})^4$	$f*(x-\bar{x})^2$
4-6	7	5	35	-4,73	22,37	-105,81	500,42	156,59
6-8	3	7	21	-2,73	7,45	-20,34	55,50	22,35
8-10	1	9	9	-0,73	0,53	-0,39	0,28	0,53
10-12	2	11	22	1,27	1,61	2,04	2,59	3,22
12-14	4	13	52	3,27	10,69	34,96	114,28	42,76
14-16	5	15	75	5,27	27,77	146,35	771,17	138,85
Σ	22	-	214	-	-	-	-	364,3

$f*(x-\bar{x})^3$	$f*(x-\bar{x})^4$
-740,67	3502,94
-61,02	166,5
-0,39	0,28
4,08	5,18
139,84	457,12
731,75	3855,85
73,59	7987,95

Najpre izračunavamo aritmetičku sredinu:

$$\bar{x} = \frac{\sum fixi}{\sum fi} = \frac{214}{22} = 9,73$$

Prosečna potrošnja brašna po domaćinstvu iznosi 9,73 kg

Zatim, izračunavamo standardnu devijaciju:

$$\sigma^2 = \frac{\sum fi(xi-\bar{X})^2}{N} = \frac{364,3}{22} = 16,56 \qquad \sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{16,56} = 4,07$$

$$\sigma^3 = 4,07^3 = 67,42$$

Centralni momenat trećeg reda nam je neophodan za određivanje asimetrije rasporeda:

$$Mk^3 = \frac{\sum fi(xi-\bar{X})^3}{N} = \frac{73,59}{22} = 3,35$$

$$\alpha_3 = \frac{Mk^3}{\sigma^3} = \frac{3,35}{67,42} = 0,05$$

Kriterijumi za određivanje asimetričnosti rasporeda su sledeći:

$\alpha_3=0$ raspored je simetričan;

$\alpha_3>0$ raspored je asimetričan u desno (pozitivna asimetrija);

$\alpha_3<0$ raspored je asimetričan u levo (negativna asimetrija).

Koeficijent asimetrije iznosi $\alpha_3=0,05>0$ što znači da je u pitanju pozitivna asimetrija, odnosno, raspored je pozitivno asimetričan u desno.

$$\sigma^4=4,07^4=274,39$$

Centralni momenat četvrtog reda nam je neophodan za određivanje spljoštenosti rasporeda:

$$Mk^4 = \frac{\sum fi(xi-\bar{X})^4}{N} = \frac{7987,95}{22} = 363,09$$

$$\alpha_4 = \frac{Mk^4}{\sigma^4} = \frac{363,09}{274,39} = 1,32$$

Kriterijumi za određivanje spljoštenosti rasporeda su sledeći:

$\alpha_4=3$ raspored je normalno spljošten;

$\alpha_4>3$ raspored je više izdužen, manje spljošten;

$\alpha_4<3$ raspored je više spljošten, manje izdužen.

Koeficijent spljoštenosti iznosi $\alpha_4=1,32<3$ što znači da je raspored više spljošten, manje izdužen.

2. Na osnovu podataka o prinosu po hektaru za 17 parcela odredite asimetriju i spljoštenost rasporeda.

Prinos po hektaru	1-3	3-5	5-7	7-9	9-11	11-13	Σ
Br. parcela	3	2	4	5	1	2	17

Rešenje:

x	f	xs	f*xs	$X-\bar{X}$	$(X-\bar{X})^2$	$(X-\bar{X})^3$	$(X-\bar{X})^4$	$f*(X-\bar{X})^2$
1-3	3	2	6	-4,59	21,07	-96,71	443,94	63,21
3-5	2	4	8	-2,59	6,71	-17,38	45,02	13,42
5-7	4	6	24	-0,59	0,35	-0,21	0,12	1,4
7-9	5	8	40	1,41	1,99	2,81	3,96	9,95
9-11	1	10	10	3,41	11,63	39,66	135,26	11,63
11-13	2	12	24	5,41	29,27	158,35	856,73	58,54
Σ	17	-	112	-	-	-	-	158,15

$f*(X-\bar{X})^3$	$f*(X-\bar{X})^4$
-290,13	1331,82
-34,76	90,04
-0,84	0,48
14,05	19,8
39,66	135,26
316,7	1713,46
44,68	3290,86

$$\bar{X} = \frac{\sum fixi}{\sum fi} = \frac{112}{17} = 6{,}59$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum fi(xi-\bar{X})^2}{N} = \frac{158{,}15}{17} = 9{,}30 \qquad \sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{9{,}30} = 3{,}05$$

$$\sigma^3 = 3{,}05^3 = 28{,}37$$

$$Mk^3 = \frac{\sum fi(xi-\overline{X})^3}{N} = \frac{44{,}68}{17} = 2{,}63$$

$$\alpha_3 = \frac{Mk^3}{\sigma^3} = \frac{2{,}63}{28{,}37} = 0{,}09$$

Koeficijent asimetrije $\alpha_3=0{,}09>0$ raspored je asimetričan u desno (pozitivna asimetrija).

$$\sigma^4 = 3{,}05^4 = 86{,}54$$

$$Mk^4 = \frac{\sum fi(xi-\overline{X})^4}{N} = \frac{3290{,}86}{17} = 193{,}58$$

$$\alpha_4 = \frac{Mk^4}{\sigma^4} = \frac{193{,}58}{86{,}54} = 2{,}24$$

Koeficijent spljoštenosti $\alpha_4=2{,}24<3$ raspored je više spljošten, manje izdužen.

3. Na osnovu podataka o potrošnji soka po domaćinstvima odredite asimetriju i spljoštenost rasporeda.

Potrošnja soka	2-6	6-10	10-14	14-18	18-22	22-26	Σ
Br. domaćinstava	3	5	4	2	1	3	18

Rešenje:

x	f	xs	f*xs	$X-\overline{X}$	$(X-\overline{X})^2$	$(X-\overline{X})^3$	$(X-\overline{X})^4$	$f*(X-\overline{X})^2$
2-6	3	4	12	-8,44	71,23	-601,18	5073,71	213,69
6-10	5	8	40	-4,44	19,71	-87,51	388,48	98,55
10-14	4	12	48	-0,44	0,19	-0,08	0,04	0,76
14-18	2	16	32	3,56	12,67	45,11	160,53	25,34
18-22	1	20	20	7,56	57,15	432,05	3266,12	57,15
22-26	3	24	72	11,56	133,63	1544,76	17856,98	400,89
Σ	18	-	224	-	-	-	-	796,38

$f*(X-\bar{X})^3$	$f*(X-\bar{X})^4$
-1803,54	15221,13
-437,55	1942,4
-0,32	0,16
90,22	321,06
432,05	3266,12
4634,28	53570,94
2915,14	74321,81

$$\bar{X} = \frac{\sum fixi}{\sum fi} = \frac{224}{18} = 12{,}44$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum fi(xi-\bar{X})^2}{N} = \frac{796{,}38}{18} = 44{,}24 \qquad \sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{44{,}24} = 6{,}65$$

$$\sigma^3 = 6{,}65^3 = 294{,}08$$

$$Mk^3 = \frac{\sum fi(xi-\bar{X})^3}{N} = \frac{2915{,}14}{18} = 161{,}95$$

$$\alpha_3 = \frac{Mk^3}{\sigma^3} = \frac{161{,}95}{294{,}08} = 0{,}55$$

Koeficijent asimetrije $\alpha_3 = 0{,}55 > 0$ raspored je asimetričan u desno (pozitivna asimetrija).

$$\sigma^4 = 6{,}65^4 = 1955{,}63$$

$$Mk^4 = \frac{\sum fi(xi-\bar{X})^4}{N} = \frac{74321{,}81}{18} = 4128{,}99$$

$$\alpha_4 = \frac{Mk^4}{\sigma^4} = \frac{4128{,}99}{1955{,}63} = 2{,}11$$

Koeficijent spljoštenosti $\alpha_4 = 2{,}11 < 3$ raspored je više spljošten, manje izdužen.

4. Na osnovu podataka o potrošnji mleka po domaćinstvima odredite asimetriju i spljoštenost rasporeda.

Potrošnja mleka	10	20	30	40	50	60	Σ
Br. domaćinstava	3	1	4	2	5	2	17

Rešenje:

x	f	f*x	$x-\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$	$(x-\bar{x})^3$	$(x-\bar{x})^4$	$f*(x-\bar{x})^2$
10	3	30	-26,47	700,66	-18546,47	490924,44	2101,98
20	1	20	-16,47	271,26	-4467,65	73581,99	271,26
30	4	120	-6,47	41,86	-270,83	1752,26	167,44
40	2	80	3,53	12,46	43,98	155,25	24,92
50	5	250	13,53	183,06	2476,8	33510,96	915,3
60	2	120	23,53	553,66	13027,62	306539,4	1107,32
Σ	17	620	-	-	-	-	4588,22

$f*(x-\bar{x})^3$	$f*(x-\bar{x})^4$
-55639,41	1472773,32
-4467,65	73581,99
-1083,32	7009,04
87,96	310,5
12384	167554,8
26055,24	613078,8
-22663,18	2334308,45

$$\bar{x} = \frac{\sum fixi}{\sum fi} = \frac{620}{17} = 36{,}47$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum fi(xi-\bar{x})^2}{N} = \frac{4588{,}22}{17} = 269{,}895 \qquad \sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{269{,}895} = 16{,}43$$

$$\sigma^3 = 16{,}43^3 = 4435{,}19$$

$$Mk^3 = \frac{\Sigma fi(xi-\bar{X})^3}{N} = \frac{-22663{,}18}{17} = -1333{,}13$$

$$\alpha_3 = \frac{Mk^3}{\sigma^3} = \frac{-1333{,}13}{4435{,}19} = -0{,}301$$

Koeficijent asimetrije $\alpha_3 = -0{,}301 < 0$ raspored je asimetričan u levo (negativna asimetrija).

$$\sigma^4 = 16{,}43^4 = 72870{,}25$$

$$Mk^4 = \frac{\Sigma fi(xi-\bar{X})^4}{N} = \frac{2334308{,}45}{17} = 137312{,}26$$

$$\alpha_4 = \frac{Mk^4}{\sigma^4} = \frac{137312{,}26}{72870{,}25} = 1{,}88$$

Koeficijent spljoštenosti $\alpha_4 = 1{,}88 < 3$ raspored je više spljošten, manje izdužen.

5. Na osnovu podataka o potrošnji vina po domaćinstvima odredite asimetriju i spljoštenost rasporeda.

Potrošnja vina	2	3	5	7	9	10	Σ
Br. domaćinstava	3	5	2	4	3	3	20

Rešenje:

x	f	f*x	$x-\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$	$(x-\bar{x})^3$	$(x-\bar{x})^4$	$f*(x-\bar{x})^2$
2	3	6	-3,8	14,44	-54,87	208,51	43,32
3	5	15	-2,8	7,84	-21,95	61,47	39,2
5	2	10	0,8	0,64	-0,51	0,41	1,28
7	4	28	1,2	0,24	0,29	0,06	0,96
9	3	27	3,2	10,24	32,77	104,86	30,72
10	3	30	4,2	17,64	74,09	311,17	53,92
Σ	20	116	-	-	-	-	168,4

$f*(X-\overline{X})^3$	$f*(X-\overline{X})^4$
-164,61	625,53
-109,75	307,35
-1,02	0,82
1,16	0,24
98,31	314,58
222,27	933,51
46,36	2182,03

$$\overline{X} = \frac{\sum fixi}{\sum fi} = \frac{116}{20} = 5,8$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum fi(xi-\overline{X})^2}{N} = \frac{168,4}{20} = 8,42 \qquad \sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{8,42} = 2,898$$

$$\sigma^3 = 2,898^3 = 24,34$$

$$Mk^3 = \frac{\sum fi(xi-\overline{X})^3}{N} = \frac{46,36}{20} = 2,318$$

$$\alpha_3 = \frac{Mk^3}{\sigma^3} = \frac{2,318}{24,34} = 0,095$$

Koeficijent asimetrije $\alpha_3 = 0,095 > 0$ raspored je asimetričan u desno (pozitivna asimetrija).

$$\sigma^4 = 16,43^4 = 705,3$$

$$Mk^4 = \frac{\sum fi(xi-\overline{X})^4}{N} = \frac{2182,03}{20} = 109,10$$

$$\alpha_4 = \frac{Mk^4}{\sigma^4} = \frac{109,10}{705,3} = 0,15$$

Koeficijent spljoštenosti $\alpha_4 = 0,15 < 3$ raspored je više spljošten, manje izdužen.

6. Na osnovu podataka o potrošnji soka po domaćinstvima odredite asimetriju i spljoštenost rasporeda.

Potrošnja soka	1-4	4-7	7-10	10-13	13-16	Σ
Br. domaćinstava	2	4	1	3	4	14

Rešenja:

x	f	xs	f*xs	$X-\bar{X}$	$(X-\bar{X})^2$	$(X-\bar{X})^3$	$(X-\bar{X})^4$	$f*(X-\bar{X})^2$
1-4	2	2,5	5	-6,64	44,09	-292,76	1943,93	88,18
4-7	4	5,5	22	-3,64	13,25	-48,23	175,56	53
7-10	1	8,5	8,5	0,64	0,41	-0,26	0,17	0,41
10-13	3	11,5	34,5	2,36	5,57	13,15	31,02	16,71
13-16	4	14,5	58	5,36	28,73	153,99	825,41	114,92
Σ	14	-	128	-	-	-	-	273,22

$f*(X-\bar{X})^3$	$f*(X-\bar{X})^4$
-585,52	3887,86
-192,92	702,24
-0,26	0,17
39,45	93,06
615,96	3301,64
-123,29	7984,97

$$\bar{X} = \frac{\Sigma fixi}{\Sigma fi} = \frac{128}{14} = 9{,}14$$

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma fi(xi-\bar{X})^2}{N} = \frac{273{,}22}{14} = 19{,}52 \qquad \sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{19{,}52} = 4{,}42$$

$$\sigma^3 = 4{,}42^3 = 86{,}35$$

$$Mk^3 = \frac{\Sigma fi(xi-\bar{X})^3}{N} = \frac{-123{,}29}{14} = -8{,}806$$

$$\alpha_3 = \frac{Mk^3}{\sigma^3} = \frac{-8{,}806}{86{,}35} = -0{,}102$$

Koeficijent asimetrije $\alpha_3=-0,102<0$ raspored je asimetričan u levo (negativna asimetrija).

$$\sigma^4 = 4,42^4 = 381,67$$

$$Mk^4 = \frac{\Sigma fi(xi-\bar{X})^4}{N} = \frac{7984,97}{14} = 570,36$$

$$\alpha_4 = \frac{Mk^4}{\sigma^4} = \frac{570,36}{381,67} = 1,49$$

Koeficijent spljoštenosti $\alpha_4=1,49<3$ raspored je više spljošten, manje izdužen.

7. Na osnovu podataka o potrošnji masti po domaćinstvima odredite asimetriju i spljoštenost rasporeda.

Potrošnja soka	4-7	7-10	10-13	13-16	16-19	Σ
Br. domaćinstava	2	4	5	3	6	20

Rešenje:

x	f	xs	f*xs	$X-\bar{X}$	$(X-\bar{X})^2$	$(X-\bar{X})^3$	$(X-\bar{X})^4$	$f*(X-\bar{X})^2$
4-7	2	5,5	11	-7,05	49,70	-350,39	2470,09	99,4
7-10	4	8,5	34	-4,05	16,40	-66,42	268,96	65,6
10-13	5	11,5	57,5	-1,05	1,10	-1,16	1,21	5,5
13-16	3	14,5	43,5	1,95	3,80	7,41	14,44	11,4
16-19	6	17,5	105	4,95	24,50	121,28	600,25	14,7
Σ	20	-	251	-	-	-	-	1223,5

$$\bar{X} = \frac{\Sigma fixi}{\Sigma fi} = \frac{251}{20} = 12,55$$

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma fi(xi-\bar{X})^2}{N} = \frac{1223,5}{20} = 61,175 \qquad \sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{61,175} = 7,82$$

$$\sigma^3 = 7,82^3 = 478,21$$

$f*(X-\bar{X})^3$	$f*(X-\bar{X})^4$
-700,78	4940,18
-265,68	1075,84
-5,8	6,05
22,23	43,32
727,68	3601,5
-222,35	9666,89

$$Mk^3 = \frac{\sum fi(xi-\bar{X})^3}{N} = \frac{-222,35}{20} = -111,18$$

$$\alpha_3 = \frac{Mk^3}{\sigma^3} = \frac{-111,18}{478,21} = 0,23$$

Koeficijent asimetrije $\alpha_3=0,23>0$ raspored je asimetričan u desno (pozitivna asimetrija).

$$\sigma^4 = 7,82^4 = 3739,62$$

$$Mk^4 = \frac{\sum fi(xi-\bar{X})^4}{N} = \frac{9666,89}{20} = 483,34$$

$$\alpha_4 = \frac{Mk^4}{\sigma^4} = \frac{483,34}{3739,62} = 0,13$$

Koeficijent spljoštenosti $\alpha_4=0,13<3$ raspored je više spljošten, manje izdužen.

8. Na osnovu podataka o potrošnji šećera po domaćinstvima odredite asimetriju i spljoštenost rasporeda.

Potrošnja šećera	2-4	4-6	6-8	8-10	10-12	12-14	Σ
Br. domaćinstava	3	1	5	2	4	5	20

Rešenje:

x	f	xs	f*xs	$x-\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$	$(x-\bar{x})^3$	$(x-\bar{x})^4$	$f*(x-\bar{x})^2$	$f*(x-\bar{x})^3$	$f*(x-\bar{x})^4$
2-4	3	3	9	-5,8	33,64	195,11	1131,65	100,92	-585,33	3394,95
4-6	1	5	5	-3,8	14,44	54,87	208,51	14,44	-54,87	208,51
6-8	5	7	35	-1,8	3,24	5,83	10,50	16,2	-29,15	52,5
8-10	2	9	18	0,2	0,04	0,008	0,002	0,08	0,02	0,004
10-12	4	11	44	2,2	4,84	10,65	23,43	19,36	42,6	93,72
12-14	5	13	65	4,2	17,64	74,09	311,17	88,2	370,45	1555,85
Σ	20	-	176	-	-	-	-	239,2	-256,28	5305,53

$$\bar{x} = \frac{\sum fixi}{\sum fi} = \frac{176}{20} = 8{,}8$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum fi(xi-\bar{x})^2}{N} = \frac{239{,}2}{20} = 11{,}96 \qquad \sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{11{,}96} = 3{,}46$$

$$\sigma^3 = 3{,}46^3 = 41{,}42$$

$$Mk^3 = \frac{\sum fi(xi-\bar{x})^3}{N} = \frac{-256{,}28}{20} = -12{,}81$$

$$\alpha_3 = \frac{Mk^3}{\sigma^3} = \frac{-12{,}81}{41{,}42} = -0{,}31$$

Koeficijent asimetrije $\alpha_3=-0{,}31<0$ raspored je asimetričan u levo (negativna asimetrija).

$$\sigma^4 = 3{,}46^4 = 143{,}32$$

$$Mk^4 = \frac{\sum fi(xi-\bar{X})^4}{N} = \frac{5305{,}53}{20} = 265{,}28$$

$$\alpha_4 = \frac{Mk^4}{\sigma^4} = \frac{265{,}28}{143{,}32} = 1{,}85$$

Koeficijent spljoštenosti $\alpha_4 = 1{,}85 < 3$ raspored je više spljošten, manje izdužen.

9. Na osnovu podataka o broju neispravnih proizvoda u proizvodnji noževa po preduzećima odredite asimetriju i spljoštenost rasporeda.

Neispravni proizvodi	9	10	12	13	15	Σ
Br. preduzeća	7	3	6	2	4	22

Rešenje:

x	f	f*x	$X-\bar{X}$	$(X-\bar{X})^2$	$(X-\bar{X})^3$	$(X-\bar{X})^4$	$f^*(X-\bar{X})^2$
9	7	63	-2,41	5,81	-14	33,76	40,67
10	3	30	-1,41	1,99	-2,81	3,96	5,97
12	6	72	0,59	0,35	0,21	0,12	2,1
13	2	26	1,59	2,53	4,02	6,4	5,06
15	4	60	3,59	12,89	46,28	166,15	51,56
Σ	22	251	-	-	-	-	105,36

$f^*(X-\bar{X})^3$	$f^*(X-\bar{X})^4$
-98	236,32
8,,43	11,88
1,26	0,72
8,04	12,8
185,12	664,5
87,99	926,32

$$\bar{X} = \frac{\sum fixi}{\sum fi} = \frac{251}{22} = 11{,}41$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum fi(xi-\bar{X})^2}{N} = \frac{105{,}36}{22} = 4{,}79 \qquad \sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{4{,}79} = 2{,}19$$

$$\sigma^3 = 2{,}19^3 = 10{,}50$$

$$Mk^3 = \frac{\sum fi(xi-\bar{X})^3}{N} = \frac{87{,}99}{22} = 4$$

$$\alpha_3 = \frac{Mk^3}{\sigma^3} = \frac{4}{10{,}50} = 0{,}38$$

Koeficijent asimetrije $\alpha_3=0{,}38>0$ raspored je asimetričan u desno (pozitivna asimetrija).

$$\sigma^4 = 2{,}19^4 = 23$$

$$Mk^4 = \frac{\sum fi(xi-\bar{X})^4}{N} = \frac{926{,}32}{22} = 42{,}11$$

$$\alpha_4 = \frac{Mk^4}{\sigma^4} = \frac{42{,}11}{23} = 1{,}83$$

Koeficijent spljoštenosti $\alpha_4=1{,}83<3$ raspored je više spljošten, manje izdužen.

2. Ocenjivanje parametara osnovnog skupa na bazi uzorka i testiranje statističkih hipoteza

2.1. Ocenjivanje parametara osnovnog skupa na bazi uzorka

1. Podaci o izdacima za kultura 30 odabranih porodica dati su u zadatku.

70 70 90 90 140 140 140 140 180 180 180 180 240 240 240 240 240 240 280 280 280 280 300 300 300 350 350 350 400 400.

Na osnovu proste distributivne frekvencije koju ćeš formirati oceni prosečne izdatke za kulturu sa rizikom od 0,05.

Rešenje:

Izdaci za kulturu (xi)	Broj porodica (fi)	x*f	X^2	F* X^2
70	2	140	4900	9800
90	2	180	8100	16200
140	4	560	19600	78400
180	4	720	32400	129600
240	6	1440	57600	345600
280	4	1120	78400	313600
300	3	900	90000	270000
350	3	1050	122500	367500
400	2	800	160000	320000
Σ	30	6910	-	1850700

Vličina uzorka je 30 (n=30). Ukoliko pogledamo kriterijum za koršćenje Z testa (n≥30) zaključujemo da se u ovom zadatku koristi statistika Z testa. Ovde je rizik greške α, što znači da je verovatnoća 1- 0,05=0,95. Berovatnoća je β. Iz tablice normalnog rasporeda određujemo vrednost za $Z_{1-\alpha/2}=Z_{1-0,05/2}= \quad Z_{1-0,025}=Z_{0,975}=1,96$ (tablična vrednost).

$m = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{6910}{30} = 230,33$ Prosečni izdaci za kulturu.

$$Sn=\sqrt{\frac{\sum x^2 * f}{\sum f} - m^2} = \sqrt{\frac{1850700}{30} - 230{,}33^2} = \sqrt{61690 - 53051{,}91}$$

$Sn=\sqrt{8638{,}09} = 92{,}94$ Minimalno prosečno odstupanje izdataka za kulturu od prosečnih izdataka za kulturu.

$$m - Z_{1-\alpha/2} * \frac{Sn}{\sqrt{n-1}} \leq \bar{X} \leq m + Z_{1-\alpha/2} * \frac{Sn}{\sqrt{n-1}}$$

$$230{,}33 - 1{,}96 * \frac{92{,}94}{\sqrt{30-1}} \leq \bar{X} \leq 230{,}33 + 1{,}96 * \frac{92{,}94}{\sqrt{29}}$$

$$230{,}33 - 1{,}96 * \frac{92{,}94}{5{,}39} \leq \bar{X} \leq 230{,}33 + 1{,}96 * 17{,}24$$

$$230{,}33 - 33{,}79 \leq \bar{X} \leq 230{,}33 + 33{,}79$$

$$196{,}54 \leq \bar{X} \leq 264{,}12$$

Sa pouzdanošću od 0,95 ocenjujemo da su prosečni izdaci za kulturu porodica u intervalu od 196,54 do 264,12.

2. Podaci o potrošnji šećera za 36 odabranih porodica dati su u zadatku.

30 30 30 45 45 70 70 70 70 70 96 96 96 96 100 100 100 120 120 120 120 125 125 125 125 125 125 130 130 130 130 130.

Na osnovu proste distributivne frekvencije koju ćeš formirati sa rizikom od 0,05 oceni prosečnu potrošnju šećera.

Rešenje:

Potrošnja šećera (xi)	Broj porodica (fi)	x*f	X^2	$F* X^2$
30	3	90	900	2700
45	2	90	2025	4050
70	5	350	4900	24500
96	4	384	9216	36864
100	3	300	10000	30000
120	4	480	14400	57600
125	6	750	15625	93750
130	5	650	16900	84500
Σ	32	3094	-	333964

$$\bar{X} = \frac{\sum fixi}{\sum fi} = \frac{3094}{32} = 96{,}69$$

Prosečna potrošnja šećera 36 porodica iznosi 96,69 kg.

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum x^2 \cdot f}{\sum f}-\bar{x}^2}=\sqrt{\frac{333964}{32}-96,69^2}=\sqrt{10436,375 - 9348,9561}$$

$$\sigma=\sqrt{1087,4189}=32,976$$

Minimalno prosečno odstupanje potrošnje šećera od prosečne potrošnje šećera iznosi 32,976 kg.

$$m-Z_{1-\alpha/2}\frac{Sn}{\sqrt{n-1}}\leq \bar{x}\leq m+Z_{1-\alpha/2}\frac{Sn}{\sqrt{n-1}}$$

$$96,69-1,96*\frac{32,976}{\sqrt{32-1}}\leq \bar{x}\leq 96,69+1,96*\frac{32,976}{\sqrt{32-1}}$$

$$96,69-1,96*\frac{32,976}{\sqrt{31}}\leq \bar{x}\leq 96,69+1,96*\frac{32,976}{\sqrt{31}}$$

$$96,69-1,96*\frac{32,976}{5,568}\leq \bar{x}\leq 96,69+1,96*\frac{32,976}{5,568}$$

$$96,69-1,96*5,922\leq \bar{x}\leq 96,69+1,96*5,922$$

$$96,69-11,607\leq \bar{x}\leq 96,69+11,607$$

$$85,083\leq \bar{x}\leq 108,297$$

Sa pouzdanošću od 0,95 ocenjujemo da su prosečna potrošnja šećera u intervalu od 85,083 do 108,297.

3. Prost slučajan uzorak stanovnika dao je sledeće rezultate:

Visina u cm (h)	**do 160**	**160,1 – 166**	**166,1 – 172**	**172,1 – 178**	**178,1 i više**
Broj stanovnika (u)	**13**	**15**	**42**	**28**	**8**

a) Oceni prosečnu visinu stanovnika sa rizikom od 0,05.
b) Odredi procenat stanovništva čija visina ne prelazi 172cm.

Rešenje:

x	f	xs	xsf	Xs^2	Xs^2f
Do 160	13	157	2041	24649	320437
160,1-166	15	163	2445	26569	398535
166,1-172	42	169	7098	28561	1199562
172,1-178	28	175	4900	30625	857500
178,1 i više	8	181	1448	32761	262088
Σ	106		17932	143165	3038122

$$m=\frac{\sum fixi}{\sum fi}=\frac{17932}{106}=169,17$$

Prosečna visina stanovnika.

$$Sn=\sqrt{\frac{3038122}{106}-169{,}17^2}=\sqrt{28661{,}5-28618{,}5}=\sqrt{43}=6{,}56$$

Minimalno prosečno odstupanje od prosečne visine stanovnika.

$$m-Z_{1-\alpha/2}\frac{Sn}{\sqrt{n-1}}\leq \bar{x}\leq m+Z_{1-\alpha/2}\frac{Sn}{\sqrt{n-1}}$$

$$169{,}17-1{,}96*\frac{6{,}56}{\sqrt{106-1}}\leq \bar{x}\leq 169{,}17+1{,}96*\frac{6{,}56}{\sqrt{106-1}}$$

$$169{,}17-1{,}96*\frac{6{,}56}{\sqrt{105}}\leq \bar{x}\leq 169{,}17+1{,}96*\frac{6{,}56}{\sqrt{105}}$$

$$169{,}17-1{,}96*\frac{6{,}56}{10{,}25}\leq \bar{x}\leq 169{,}17+1{,}96*\frac{6{,}56}{10{,}25}$$

$$169{,}17-1{,}96*0{,}64\leq \bar{x}\leq 169{,}17+1{,}96*0{,}64$$

$$169{,}17-1{,}2544\leq \bar{x}\leq 169{,}17+1{,}2544$$

$$167{,}9156\leq \bar{x}\leq 170{,}4244$$

Sa pouzdanošću od 0,95 ocenjujemo da su prosečna visina stanovnika u intervalu od 167,9156 do 170,4244.

b) (13+15+42)/106=70/106=0,6604*100=66,04% procenat stanovništva čija visina ne prelazi 172 cm.

4. Slučajno odabrani uzorak od 21 prodavnica dao je sledeći rezultat u pogledu mesečnih prihoda u 000 dinara.

45 44 30 34 38 42 54 39 43 48 36 49 23 24 28 26 46 41 31 33 36

Sa rizikom greške od 0,05 oceni prosečan prihod prodavnica.

Rešenje:

a) K=5 i=6

x	f	xs	Xs^2	F*Xs	F* Xs^2	Kum. ispod
23 – 29	4	26	676	104	2704	4
29,1 – 35	4	32	1024	128	4096	8
35,1 – 41	5	38	1444	190	7220	13
41,1 - 47	5	44	1936	220	9680	18
47,1 i više	3	50	2500	150	7500	21
Σ	21	-	-	792	31200	-

$m = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{792}{21} = 37{,}71$ Prosečni mesečni prihod iznosi 37710 dinara.

$Sn = \sqrt{\frac{\sum x^2 \cdot f}{\sum f} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{31200}{21} - 37{,}71^2} = \sqrt{1485{,}71 - 1422{,}04} = \sqrt{63{,}67} = 7{,}98$

Minimalno prosečno odstupanje mesečnog prihoda od prosečnog prihoda iznosi 7980 dinara.

$t_{n-1;\alpha/2} = t_{21-1;0,05/2} = t_{20;0,025} = 2{,}0860$ (vrednost iz tablice)

$$m - t_{n-1;\alpha/2}\frac{Sn}{\sqrt{n-1}} \le \bar{x} \le m + t_{n-1;\alpha/2}\frac{Sn}{\sqrt{n-1}}$$

$$37{,}71 - 2{,}086 * \frac{7{,}98}{\sqrt{21-1}} \le \bar{x} \le 37{,}71 + 2{,}086 * \frac{7{,}98}{\sqrt{21-1}}$$

$$37{,}71 - 2{,}086 * \frac{7{,}98}{4{,}47} \le \bar{x} \le 37{,}71 + 2{,}086 * \frac{7{,}98}{4{,}47}$$

$$37{,}71 - 2{,}086 * 1{,}7852 \le \bar{x} \le 37{,}71 + 2{,}086 * 1{,}7852$$

$$37{,}71 - 3{,}724 \le \bar{x} \le 37{,}71 + 3{,}724$$

$$33{,}986 \le \bar{x} \le 41{,}434$$

Sa pouzdanošću od 0,95 ocenjujemo da su prosečni mesečni prihod u intervalu od 33,986 do 41,434.

5. Dat je raspored domaćinstava prema potrošnji mesa na bazi uzorka od 49 domaćinstava.

Potrošnja mesa u kg	**3 – 5**	**5 – 7**	**7 – 9**	**9 – 11**	**11 – 13**	**13 – 15**
Broj domaćinstava	**2**	**3**	**7**	**16**	**18**	**3**

Sa koeficijentom pouzdanosti od 0,98 oceni učešće domaćinstava koja troše manje od 9kg mesa.

Rešenje:

Vličina uzorka je 49 (n=49). Ukoliko pogledamo kriterijum za koršćenje Z testa ($n \geq 30$) zaključujemo da se u ovom zadatku koristi statistika Z testa. Ocenjena vrednost prororcije uzorka se računa po formuli $p = \frac{f}{n}$. Broj domaćinstava koja troše manje od 9 kg mesa saberemo iz kolone f (12), podelimo sa ukupnim brojem domaćinstava i dobijemo vrednost P. Sp je standardna greška proporcije. Koeficijent β predstavlja verovatnoću. Ovde je verovatnoća 0,98, što znači da je rizik greške 1-0,98=0,02. Rizik greške je α. Iz tablice normalnog rasporeda određujemo vrednost za $Z_{1-\alpha/2}=Z_{1-0,02/2}=Z_{1-0,01}=Z_{0,99}=2{,}33$ (tablična vrednost).

$$P - Z_{1-\alpha/2}Sp \leq p \leq P + Z_{1-\alpha/2}Sp \qquad P=\frac{f}{n}=\frac{12}{49}=0{,}25 \qquad \beta=0{,}98 \qquad \alpha=0{,}02$$

$$0{,}25-2{,}33*\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq p \leq 0{,}25+2{,}33*\sqrt{\frac{0{,}25(1-0{,}25)}{49}}$$

$$0{,}25-2{,}33*\sqrt{\frac{0{,}1875}{49}} \leq p \leq 0{,}25+2{,}33*\sqrt{0{,}0038}$$

$$0{,}25-2{,}33*0{,}062 \leq p \leq 0{,}25+2{,}33*0{,}062$$

$$0{,}25-0{,}1445 \leq p \leq 0{,}25+0{,}1445$$

$$0{,}1055 \leq p \leq 0{,}3945$$

Sa pouzdanošću od 0,98 ocenjujemo da se procenat učešća domaćinstava koja troše manje od 9 kg mesa nalazi u intervalu od 10,55% do 39,45%.

6. Sa rizikom greške 0,05 oceni interval poverenja u kome se nalazi % neispravnih proizvoda ako je u uzorku od 450 proizvoda bilo 9% (0,09) neispravnih.

Rešenje:

$$P=0{,}09 \qquad Z_{1-\alpha/2}=Z_{1-0{,}05/2}=1{,}96$$

$$P - Z_{1-\alpha/2}Sp \leq p \leq P + Z_{1-\alpha/2}Sp$$

$$0{,}09-1{,}96*0{,}0135 \leq p \leq 0{,}09-1{,}96*0{,}0135$$

$$0{,}09-0{,}02646 \leq p \leq 0{,}09+0{,}02646$$

$$0{,}06354 \leq p \leq 0{,}11646$$

$$6{,}354\% \leq p \leq 11{,}65\%$$

Sa pouzdanošću od 0,95 ocenjujemo da se procenat učešća neispravnih proizvoda nalazi u intervalu od 6,354% do 11,65%.

7. Sa rizikom greške 0,05 oceni interval poverenja u kome se nalazi % neispravnih proizvoda ako je u uzorku od 600 proizvoda bilo 5% (0,05) neispravnih.

Rešenje:

$$P = 0{,}05 \quad Z_{1-\alpha/2} = Z_{1-0{,}05/2} = 1{,}96$$

$$P - Z_{1-\alpha/2}Sp \leq p \leq P + Z_{1-\alpha/2}Sp.$$

$$0{,}05 - 1{,}96 * 0{,}00889 \leq p \leq 0{,}05 - 1{,}96 * 0{,}00889$$

$$0{,}05 - 0{,}0174 \leq p \leq 0{,}05 + 0{,}0174$$

$$0{,}0326 \leq p \leq 0{,}0674$$

$$3{,}26\% \leq p \leq 6{,}74\%$$

Sa pouzdanošću od 0,95 ocenjujemo da se procenat učešća neispravnih proizvoda nalazi u intervalu od 3,26% do 6,74%.

8. Podaci o potrošnji ulja za 36 odabranih domaćinstava dati su u zadatku.

50 50 50 80 80 80 80 90 90 90 90 90 90 110 110 110 110 110 110 110 150 150 150 150 150 180 180 180 200 200 200 200 220 220 220 220.

a) Sa rizikom od 0,05 oceni učešće domaćinstava koja troše manje od 180 litara ulja.

Rešenje:

a)

$$P = \frac{f}{n} = \frac{25}{36} = 0{,}69$$

$$Sp = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}69(1-0{,}69)}{36}} = \sqrt{\frac{0{,}2139}{36}} = \sqrt{0{,}00594} = 0{,}077$$

$$P - Z_{1-\alpha/2}Sp \leq p \leq P + Z_{1-\alpha/2}Sp$$

$$0{,}69 - 1{,}96 * 0{,}077 \leq p \leq 0{,}69 + 1{,}96 * 0{,}077$$

$$0{,}69 - 0{,}15092 \leq p \leq 0{,}69 + 0{,}15092$$

$$0{,}53908 \leq p \leq 0{,}84092$$

$$0{,}53908 * 100\% \leq p \leq 0{,}84092 * 100\%$$

$$53{,}908\% \leq p \leq 84{,}092\%$$

Sa pouzdanošću od 0,95 ocenjujemo da se procenat učešća domaćinstava koja troše manje od 180 l ulja nalazi u intervalu od 3,26% do 6,74%.

9. Dati su podaci o mesečnoj potrošnji po domaćinstvima u hiljadama.

40 44 30 31 35 42 30 32 41 42 33 39 25 24
27 40 41 31 36 38 31 35 31 21 28 25 32 33

Uz rizik greške 0,05 oceni procenat domaćinstava koja imaju manju potrošnju od 37 000 dinara.

Rešenje:

Veličina uzorka je 28 (n=28). Ukoliko pogledamo kriterijum za koršćenje Z testa (n≥30) zaključujemo da se u ovom zadatku koristi statistika t testa.

$$P = \frac{f}{n} = \frac{19}{28} = 0,68 \qquad \alpha = 0,05$$

$t_{n-1;\alpha/2} = t_{28-1;0,05/2} = t_{27;0,025} = 2,0518$ (vredost iz tablice)

$$P - t_{n-;\alpha/2} * Sp \leq p \leq P + t_{n-;\alpha/2} * Sp$$

$$0,68 - 2,0518\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq p \leq 0,68 + 2,0518\sqrt{\frac{0,68(1-0,68)}{28}}$$

$$0,68 - 2,0518\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq p \leq 0,68 + 2,0518\sqrt{0,00778}$$

$$0,68 - 2,0518\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq p \leq 0,68 + 2,0518 * 0,088$$

$$0,68 - 0,181 \leq p \leq 0,68 + 0,181$$

$$0,499 \leq p \leq 0,861$$

Sa pouzdanošću od 0,95 ocenjujemo da se procenat učešća domaćinstava koja troše manje od 37000 dinara nalazi u intervalu od 49,9% do 86,1%.

2.2. Testiranje statističkih hipoteza

1. Dati su podaci o mesečnom prihodu po domaćinstvima. Na osnovu intervalne serije podataka proveri hipotezu da:

33 31 42 27 40 28 44 36 21 39 41 30 35 25 32 24 31 32 35 42 31 33 31 41 30 40

a) prosečna potrošnja mleka nije manja od 36 litara (rizik greške 0,1).
b) da je prosečna potrošnja mleka 35 litara (rizik greške 0,02).
c) da je prosečna potrošnja mleka manja od 37 litara (rizik greške 0,1)

Rešenje:

$$k=1+3{,}3\log N=1+3{,}3\log 26=1+3{,}3*1{,}415=1+4{,}67=5{,}67\approx 6$$

$$i=(44-21)/6=23/6=3{,}83\approx 4$$

x	f	xs	fxs	x^2	$x^2 f$
21-25	3	23	69	529	1587
25,1-29	2	27	54	729	1458
29,1-33	10	31	310	961	9610
33,1-37	3	35	105	1225	3675
37,1-41	5	39	195	1521	7605
41,1-45	3	43	129	1849	5547
$\sum$	26		862	/	29482

a) $\overline{X}=\dfrac{862}{26}=33{,}15$ Prosečna potrošnja mleka.

$Sn=\sqrt{\dfrac{29482}{26}-33{,}15^2}=\sqrt{1133{,}92-1098{,}92}=\sqrt{35}=5{,}92$ Minimalno prosečno odstupanje potrošnje mleka od prosečne potrošnje mleka.

Uvek kada ispitujemo nejednakost pretpostavku pozicioniramo u hipotezi H1. Kada ispitujemo jednakost onda tu pretpostavku pozicioniramo u Ho. U prvom zahtevu ispitujemo hipotezu da prosečna potrošnja mleka (aritmetička sredina) nije manja od 36, dakle, ispitujemo da li je veća od 36 i to je naša hipoteza H1. Ostale alternative pozicioniramo u hipotezi Ho. U drugom koraku određujemo statistiku testa prema uslovu za primenu Z (t) testa. U trećem koraku određujemo kritične vrednosti testa. U zavisnosti od toga da li je test jednosmeran ili dvosmeran rizik greške ostaje u celosi (primer pod a) i pod c)) ili se deli na pola (primer pod b)). Četvrti korak podrazumeva definisanje pravila za prihvatanje, tj. odbacivanje nulte hipoteze. U petom koraku izračunavamo vrednost statistike testa i u poslednjem koraku donosimo odluku o prihvatanju/odbacivanju hipoteze koju ispitujemo.

1. Ho ($\bar{X}$≤36) H1 ($\bar{X}$>36)
2. n=26<30 koristimo t test
3. $t_{n-1;\alpha}=t_{26-1;0,1}=t_{25;0,1}=1,316$ (vrednost iz tablice)
4. Ho se prihvata za t<1,316
   Ho se odbacuje za t≥1,316

$$t=\frac{m-\bar{X}}{Sn}\sqrt{n-1}$$

$$t=\frac{33.15-36}{\frac{5,92}{\sqrt{25}}}=\frac{-2,85}{\frac{5,92}{5}}=\frac{-2,85}{1,184}=-2,407$$

t= -2,407<1,316 Ho se prihvata, tvrdnja nije tačna. Prosečna potrošnja mleka nije veća od 36 litara.

b) Ho ($\bar{X}$=35) H1 ($\bar{X}$≠35)
2. n=26<30 koristimo t test
3. $t_{n-1;\alpha/2}=t_{26-1;0,02/2}=t_{25;0,01}=2,485$ (vrednost iz tablice)
4. Ho se prihvata za |t|<2,485
   Ho se odbacuje za |t|≥2,485

5. $$t=\frac{33.15-35}{\frac{5,92}{\sqrt{25}}}=\frac{-1,85}{\frac{5,92}{5}}=\frac{-1,85}{1,184}=-1,56$$

|t|=1,56<2,485 Ho se prihvata, tvrdnja je tačna. Prosečna potrošnja mleka iznosi 35 litara.

c) 1. Ho ($\bar{X}$≥37) H1 ($\bar{X}$<37)
2. n=26<30 koristimo t test
3. $t_{n-1;\alpha}=t_{26-1;0,1}=t_{25;0,1}=1,316$ (vrednost iz tablice)
4. Ho se prihvata za t> -1,316
   Ho se odbacuje za t≤ -1,316

$$t=\frac{33.15-37}{\frac{5,92}{\sqrt{25}}}=\frac{-3,85}{\frac{5,92}{5}}=\frac{-3,85}{1,184}=-3,25$$

t= -3,25< -1,316 H1 se prihvata, tvrdnja je tačna. Prosečna potrošnja mleka je manja od 37 litara.

2. Na osnovu podataka o ostvarenoj proizvodnji sladoleda testiraj hipotezu da:

a) prosečna proizvodnja sladoleda nije veća 15 uz rizik greške 0,02;

b) prosečna proizvodnja sladoleda iznosi 14 uz rizik greške od 0,05.

Proizvodnja sladoleda	**8 – 10**	**11 – 13**	**14 – 16**	**17 – 19**	**20 i više**
Broj preduzeća	**7**	**10**	**14**	**12**	**15**

Rešenje:

Proizvodnja sladoleda	Broj Preduzeća	Xs	xsf	Xs^2	fXs^2
8-10	7	9	63	81	567
11-13	10	12	120	144	1440
14-16	14	15	210	225	3150
17-19	12	18	216	324	3880
20 i više	15	21	315	441	6615
$\sum$	58	-	924	-	15652

a) $$\bar{X} = \frac{\sum fixi}{N=\sum fi} = \frac{924}{58} = 15{,}93$$ Prosečna proizvodnja sladoleda m= $\bar{X}$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{fixi} 2}{n} - \bar{X}^2 = \frac{15652}{58} - 15{,}93^2 = 269{,}86\text{-}253{,}76\text{=}16{,}1$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{16{,}1} = 4{,}01$$ Minimalno prosečno odstupanje od prosečne proizvodnje sladoleda Sn=σ

1. Ho ($\bar{X}$≥15) H1 ($\bar{X}$<15)
2. n=58>30 koristimo Z test
3. $-Z_{1-\alpha}= -Z_{1-0,02}= -Z_{0,98}= -2{,}05$ (vrednost iz tablice)
4. Ho se prihvata za Z> -2,05
   Ho se odbacuje za Z≤ -2,05
5. $$Z = \frac{m-\bar{X}_0}{Sn}\sqrt{n-1} = \frac{15{,}93\text{-}15}{4{,}01}\sqrt{58\text{-}1} = \frac{0{,}93}{0{,}5311} = 1{,}751$$

Z=1,751> -2,05 Ho se prihvata naša tvrdnja nije tačna. Prosečna proizvodnja sladoleda je veća od 15.

b) Ho ($\bar{X}$=14) H1 ($\bar{X}$≠14)
2. n=58>30 koristimo Z test
3. $Z_{1-\alpha/2}= Z_{1-0,05/2}= Z_{1-0,025}= Z_{0,975} =1{,}96$ (vrednost iz tablice)

4. Ho se prihvata za |Z|<1,96
   Ho se odbacuje za |Z|≥1,96

5. $Z = \frac{m-\overline{X}_o}{Sn}\sqrt{n-1} = \frac{15{,}93-14}{4{,}01}\sqrt{58-1} = \frac{1{,}93}{0{,}5311} = 3{,}634$.

|Z|=3,634>1,96 H se prihvata, tvrdnja nije tačna. Prosečna proizvodnja sladoleda ne iznosi 14.

3. Na osnovu podataka o potrošnji šećera u kilogramima:
a) Odredite prosečnu potrošnju šećera i odstupanje od prosečne potrošnje šećera.
b) Uz rizik greške 0,05 ispitati pretpostavku da prosečna potrošnja šećera nije veća 15 kg.

Potrošnja šećera	**10 - 12**	**12 - 14**	**14 – 16**	**16 - 18**	**18 i više**	**∑**
Broj lica	**12**	**16**	**17**	**23**	**19**	**87**

Rešenje:

x	f	Xs	F*Xs	Xs^2	$F*Xs^2$
10 – 12	12	11	132	121	1452
12 – 14	16	13	208	169	2704
14 – 16	17	15	255	225	3825
16 – 18	23	17	391	289	6647
18 i više	19	19	361	361	6859
Σ	87	-	1347	-	21487

a) $m = \frac{\sum fixi}{N=\sum fi} = \frac{1347}{87} = 15{,}48$ Prosečna potrošnja šećera

$Sn^2 = \frac{\sum fixi^2}{n} - \overline{X}^2 = \frac{21487}{87} - 15{,}48^2 = 246{,}98-239{,}63=7{,}35$

$Sn = \sqrt{Sn^2} = \sqrt{7{,}35} = 2{,}71$ Minimalno prosečno odstupanje od prosečne potrošnje šećera.

b) 1. Ho ($\overline{X}$≥15)   H1 ($\overline{X}$<15)
2. n=87>30 koristimo Z test
3. $-Z_{1-\alpha}= -Z_{1-0{,}05}= -Z_{0{,}95}= -1{,}65$ (vrednost iz tablice)
4. Ho se prihvata za Z> -1,65
   Ho se odbacuje za Z≤ -1,65

$$Z = \frac{m - \bar{X}_o}{Sn}\sqrt{n-1} = \frac{15{,}48-15}{2{,}71}\sqrt{87-1} = \frac{0{,}48}{2{,}71}\sqrt{86} = \frac{0{,}48}{2{,}71} * 9{,}27 = 1{,}64$$

Z=1,64> -1,65 Ho se prihvata naša tvrdnja nije tačna. Prosečna potrošnja šećera je veća od 15.

4. Uz rizik greške 0,05 ispitati hipotezu da prosečna potrošnja ulja nije veća od 35 kg.

Potrošnja ulja	**20**	**30**	**40**	**50**	**60**	**∑**
Broj domaćenstava	**9**	**5**	**6**	**8**	**4**	**32**

Rešenje:

x	f	F*Xs	Xs^2	$F*Xs^2$
20	9	180	400	3600
30	5	150	900	4500
40	6	240	1600	9600
50	8	400	2500	20000
60	4	240	3600	14400
Σ	32	1210	-	52100

$$m = \frac{\Sigma fixi}{N = \Sigma fi} = \frac{1210}{32} = 37{,}81$$

Prosečna potrošnja ulja.

$$Sn^2 = \frac{\Sigma fixi^2}{n} - \bar{x}^2 = \frac{52100}{32} - 37{,}81^2 = 1628{,}13 - 1429{,}59 = 198{,}54$$

$$Sn = \sqrt{Sn^2} = \sqrt{198{,}54} = 14{,}09$$

Minimalno prosečno odstupanje od prosečne potrošnje ulja.

b) 1. Ho ($\bar{X}$≥35)   H1 ($\bar{X}$<35)
2. n=32>30 koristimo Z test
3. $-Z_{1-\alpha} = -Z_{1-0,05} = -Z_{0,95} = -1{,}65$ (vrednost iz tablice)
4. Ho se prihvata za Z> -1,65
   Ho se odbacuje za Z≤ -1,65

$$Z = \frac{m - \bar{X}_o}{Sn}\sqrt{n-1} = \frac{37{,}81-35}{14{,}09}\sqrt{31} = \frac{2{,}81}{14{,}09} * 5{,}57 = 1{,}11$$

Z=1,11> -1,65 Ho se prihvata naša tvrdnja nije tačna. Prosečna potrošnja ulja je veća od 35.

5. Izvučen je uzorak od 69 preduzeća prema ukupnom prihodu.

Ukupan prihod (x)	do 8	8 – 10	10 – 12	12 – 14	14 - 16	16 i više
Broj preduzeća (f)	2	13	20	28	4	2

a) Sa rizikom od 0,06 oceni ukupan prihod preduzeća ako je osnovni skup veličine 5000.
b) Testiraj hipotezu da je prosečan prihod najmanje 14. Rizik greške je 0,03.

Rešenje:

x	f	Xs	F*Xs	Xs^2	$F*Xs^2$
Do 8	2	7	14	49	98
8 – 10	13	9	117	81	1053
10 – 12	20	11	220	121	2420
12 – 14	28	13	364	169	4732
14 – 16	4	15	60	225	900
16 i više	2	17	34	289	578
Σ	69	-	809	-	9781

a) $m = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{809}{69} = 11{,}725 \qquad Sn = \sqrt{\frac{\sum fx^2}{\sum f} - m^2} = \sqrt{\frac{9781}{69} - 11{,}725^2}$

$Sn = \sqrt{141{,}75 - 137{,}48} = \sqrt{4{,}27} = 2{,}07 \qquad \alpha=0{,}06 \qquad N=5000$

$$Z_{1-\alpha/2}=Z_{1-0{,}06/2}=Z_{1-0{,}03}=Z_{0{,}97}=1{,}89$$

$$m - Z_{1-\alpha/2}\frac{S_n}{\sqrt{n-1}} \le \bar{x} \le m + Z_{1-\alpha/2}\frac{S_n}{\sqrt{n-1}}$$

$$11{,}725 - 1{,}89\frac{2{,}07}{\sqrt{69-1}} \le \bar{x} \le 11{,}725 + 1{,}89\frac{2{,}07}{\sqrt{69-1}}$$

$$11{,}725 - 1{,}89\frac{2{,}07}{\sqrt{68}} \le \bar{x} \le 11{,}725 + 1{,}89\frac{2{,}07}{8{,}25}$$

$$11{,}725 - 1{,}89*0{,}25 \le \bar{x} \le 11{,}725 + 1{,}89*0{,}25$$

$$11{,}725 - 0{,}4725 \le \bar{x} \le 11{,}725 + 0{,}4725$$

$$11{,}25 \le \bar{x} \le 12{,}198 \quad /*N$$

$$11{,}25*5000 \le \bar{x} \le 12{,}198 \ *5000$$

$$56250 \le \bar{x} \le 60990$$

Sa pouzdanošću od 0,94 ocenili smo da se ukupni prihod preduzeća kreće u intevalu od 56250 do 60990.

b) 1. Ho ($\overline{X}$≤14) H1 ($\overline{X}$>14)
2. n=69>30 koristimo Z test
3. $Z_{1-\alpha}= Z_{1-0,03}= Z_{0,97}=$ 1,89 (vrednost iz tablice)
4. Ho se prihvata za Z<1,89
 Ho se odbacuje za Z≥1,89

$$Z = \frac{m-\bar{x}_0}{\frac{S_n}{\sqrt{n-1}}}; \quad Z=\frac{11,725-14}{\frac{2,07}{\sqrt{69-1}}} = \frac{-2,275}{0,25} = -9,1$$

Z=-9,1<1,89 Ho se prihvata, naša tvrdnja nije tačna. Prosečan prihod je veći od 14.

6. Uzorak od 300 slučajno odabranih parcela dao je sledeće rezultate u prinosu kukuruza:

Prinos (h)	**do 30**	**30 – 40**	**40 – 50**	**50 i više**
Broj parcela (f)	**150**	**70**	**50**	**30**

Uz verovatnoću od 0,99 ispitaj hipotezu da je:
a) prosečan prinos osnovnog skupa 35 mc/h, **b) najmanje 34 mc/h.**

Rešenje:

x	f	Xs	F*Xs	Xs^2	$F*Xs^2$
Do 30	150	25	625	3750	93750
30 – 40	70	35	1225	2450	85750
40 – 50	50	45	2025	2250	101250
50 i više	30	55	3025	1650	90750
Σ	300	-	-	10100	371500

$$a)\ m=\frac{\sum xf}{\sum f}=\frac{10100}{300}=33,67$$ Prosečan prinos kukuruza.

$$Sn=\sqrt{\frac{\sum fx^2}{\sum f}-\bar{x}^2}=\sqrt{\frac{371500}{300}-33,67^2}=\sqrt{1238,33-1133,67}$$

$$Sn=\sqrt{104,66}=10,23$$ Minimalno prosečno odstupanje prinosa kukuruza od prosečnog prinosa kukuruza.

a) Ho ($\overline{X}$=35) H1 ($\overline{X}$≠35) β=0,99 α=1-β=1-0,99=0,01
2. n=300>30 koristimo Z test
3. $Z_{1-\alpha/2}= Z_{1-0,01/2}= Z_{1-0,005}= Z_{0,995}$ =2,58 (vrednost iz tablice)

4. Ho se prihvata za |Z|<2,58
Ho se odbacuje za |Z|≥2,58

5. $$Z=\frac{33,67-35}{\frac{10,23}{\sqrt{300-1}}}=\frac{-1,33}{\frac{10,23}{\sqrt{299}}}=\frac{-1,33}{\frac{10,23}{17,29}}=\frac{-1,33}{0,592}=-2,25$$

|Z|=-2,25<2,58 Ho se prihvata, tvrdnja je tačna. Prosečan prinos osnovnog skupa iznosi 35 mc/h.

b) b) 1. Ho ($\bar{X}$≤34) H1 ($\bar{X}$>34)
2. n=300>30 koristimo Z test
3. $Z_{1-\alpha}= Z_{1-0,01}= Z_{0,99}$= 2,33 (vrednost iz tablice)
4. Ho se prihvata za Z<2,33
Ho se odbacuje za Z≥2,33

5. $$Z=\frac{33,67-34}{\frac{10,23}{\sqrt{300-1}}}=\frac{-0,33}{\frac{10,23}{\sqrt{299}}}=\frac{-0,33}{\frac{10,23}{17,29}}=\frac{-0,33}{0,592}=-0,5574$$

Z= - 0,5574<2,33 Ho se prihvata što znači da naša pretpostavka nije tačna. Prosečan prinos osnovnog skupa manji je od 34.

7. Prost slučajan uzorak dao je sledeće rezultate:

Vreme izrade proizvoda A	**7 – 9**	**9 – 11**	**11 – 13**	**13 – 15**	**15 – 17**
Broj radnika	**2**	**5**	**8**	**4**	**1**

Uz rizik greške α=0,05 proveri hipotezu da prosečno vreme izrade nije veće od 11,5 min.

Rešenje:

x	f	Xs	F*Xs	Xs^2	$F*Xs^2$
7 – 9	2	8	16	64	128
9 – 11	5	10	50	100	500
11 – 13	8	12	96	144	1152
13 – 15	4	14	56	196	784
15 – 17	1	16	16	256	256
Σ	20	-	234	-	2820

a) $m = \frac{\sum f_i x_i}{N = \sum f_i} = \frac{234}{20} = 11,70$ Prosečno vreme izrade proizvoda

$$Sn^2 = \frac{\sum f_i x_i{}^2}{n} - \bar{X}^2 = \frac{2\,820}{20} - 11,70^2 = 141 - 136,89 = 4,11$$

$Sn = \sqrt{Sn^2} = \sqrt{4,11} = 2,03$ Minimalno prosečno odstupanje vremena izrade proizvoda od prosečnog vremena izrade proizvoda.

b) 1. Ho ($\bar{X}$≥11,5)   H1 ($\bar{X}$<11,5)
2. n=20>30 koristimo t test
3. $-t_{n-1;\alpha} = -t_{20-1;0,05} = -t_{19;0,05} = -1{,}7291$ (vrednost iz tablice)
4. Ho se prihvata za t> -1,7291
   Ho se odbacuje za t≤ -1,7291
5. $t = \frac{m - \bar{X}_o}{Sn}\sqrt{n-1} = \frac{11,7-11,5}{2,03}\sqrt{19} = \frac{0,2}{2,03} * 4,359 = 0,0985 * 4,359 = 0,43$

t=0,43> -1,7292 Ho se prihvata što znači da naša tvrdnja nije tačna. Prosečno vreme izrade radnika je veće od 11,5 minuta.

8. Dati su podaci o mesečnom prihodu po domaćinstvima. Na osnovu intervalne serije podataka:

30 37 39 40 31 30 26 27 25 35 24 31 32 31 40
42 36 41 39 32 27 33 31 44 35 42 21 28 41 38

a) Odredi Mo i Me.
b) Sa rizikom greške od 0,03 proveri pretpostavku da prosečan mesečni prihod iznosi 36.

Rešenje:

k=1+3,3logn=1+3,3log30=1+3,3*1,477=1+4,87=5,87≈6
i=(44-21)/6=23/6=3,83≈4

x	f	xs	fxs	x2	x2f	Kum.ispod
21-25	3	23	69	529	1587	3
25,1-29	4	27	108	729	2916	7
29,1-33	9	31	279	961	8649	16
33,1-37	4	35	140	1225	4900	20
37,1-41	7	39	273	1521	10647	27
41,1-45	3	43	129	1849	5547	30
∑	30		998	/	34246	—

$$Mo=29{,}1+\frac{9-4}{(9-4)+(9-4)}*4=29{,}1+\frac{20}{10}=29{,}1+2=31{,}1$$

Položaj Me=(n+1)/2=(30+1)/2=31/2=15,5

$$Me=29{,}1+\frac{\frac{30}{2}-7}{9}*4=29{,}1+\frac{32}{9}=29{,}1+3{,}56=32{,}66$$

a) $\overline{X}=\frac{998}{30}=33{,}27$ Prosečan mesečni prihod

$$Sn=\sqrt{\frac{34246}{30}-33{,}27^2}=\sqrt{1141{,}53-1106{,}89}=\sqrt{34{,}64}=5{,}9$$

Minimalno prosečno odstupanje mesečnog prihoda od prosečnog mesečnog prihoda.

b) a) Ho ($\overline{X}$=36) H1 ($\overline{X}\neq$36) α=0,03
2. n=30 koristimo Z test
3. $Z_{1-\alpha/2}=Z_{1-0,03/2}=Z_{1-0,015}=Z_{0,985}$ =2,17 (vrednost iz tablice)
4. Ho se prihvata za |Z|<2,17
Ho se odbacuje za |Z|≥2,17

5. $$Z=\frac{33{,}27-36}{\frac{5{,}9}{\sqrt{29}}}=\frac{-2{,}73}{\frac{5{,}9}{5{,}39}}=\frac{-2{,}73}{1{,}09}=-2{,}505$$

|Z|=2,505>2,17 H1 se prihvata, tvrdnja nije tačna. Prosečan mesečni prihod ne iznosi 36.

9. Na osnovu podataka o ostvarenoj proizvodnji sladoleda u 35 preduzeća testiraj hipotezu da:
a) prosečna proizvodnja sladoleda nije veća 39 uz rizik greške 0,02;
b) prosečna proizvodnja iznosi 29 uz rizik greške od 0,10.

Proizvodnja sladoleda	**20 – 29**	**30 – 39**	**40 – 49**	**50 – 59**	**60 i više**
Broj preduzeća	**200**	**150**	**80**	**50**	**20**

Rešenje:

x	f	xs	xsf	Xs^2	Xs^2f
20-29	200	24,5	4900	600,25	120050
30-39	150	34,5	5175	1190,25	178537,5
40-49	80	44,5	3560	1980,25	158420
50-59	50	54,5	2725	2970,25	148512,5
60 i više	20	64,5	1290	4160,25	83205
∑	500	-	17650	-	688725

$$\bar{X}=\frac{17650}{500}=35{,}3 \qquad Sn=\sqrt{\frac{688725}{500}-35{,}3^2}=\sqrt{1377{,}45-1246{,}09}=\sqrt{131{,}36}=11{,}46$$

$\bar{X}$=m - Prosečna proizvodnja sladoleda iznosi 35,3 kg.

Sn – Minimalno prosečno odstupanje proizvodnje sladoleda od prosečne proizvodnje sladoleda iznosi 11,46 kg.

a) 1. Ho ($\bar{X}\geq 39$) H1 ($\bar{X}<39$)
2. n=500>30 koristimo Z test
3. $-Z_{1-\alpha}=-Z_{1-0,02}=-Z_{0,98}=-2{,}06$ (vrednost iz tablice)
4. Ho se prihvata za Z> -2,06
   Ho se odbacuje za Z≤ -2,06
5.
$$Z=\frac{m-\bar{X}_o}{Sn}\sqrt{n-1}=\frac{35{,}3-39}{11{,}46}\sqrt{499}=\frac{-3{,}7}{\frac{11{,}46}{22{,}34}}=\frac{-3{,}7}{0{,}513}=-7{,}21$$

Z= -7,21 > -2,06 Ho se prihvata naša tvrdnja nije tačna. Prosečna proizvodnja sladoleda je veća od 39.

b) 1. Ho ($\bar{X}=29$) H1 ($\bar{X}\neq 29$) $\alpha=0{,}10$
2. n=500>30 koristimo Z test
3. $Z_{1-\alpha/2}=Z_{1-0,10/2}=Z_{1-0,05}=Z_{0,95}=1{,}65$ (vrednost iz tablice)
4. Ho se prihvata za |Z|<1,65
   Ho se odbacuje za |Z|≥1,65
5.
$$Z=\frac{m-\bar{X}_o}{Sn}\sqrt{n-1}=\frac{35{,}3-29}{11{,}46}\sqrt{499}=\frac{6{,}3}{\frac{11{,}46}{22{,}34}}=\frac{6{,}3}{0{,}513}=12{,}28$$

|Z|=12,28>1,65 H1 se prihvata, tvrdnja nije tačna. Prosečna proizvodnja sladoleda ne iznosi 29.

10. Uz rizik greške 0,05 ispitati hipotezu da prosečna potrošnja šećera nije veća od 33 kg.

Potrošnja šećera	**20**	**30**	**35**	**50**	**65**	**∑**
Broj domaćinstava	**5**	**10**	**45**	**30**	**15**	**105**

Rešenje:

x	f	xf	X^2	X^2f
20	5	100	400	2000
30	10	300	900	9000
35	45	1575	1225	55125
50	30	1500	2500	75000
65	15	975	4225	63375
∑	105	4450	9250	204500

$$\bar{X}=\frac{4450}{105}=42{,}38 \qquad Sn=\sqrt{\frac{204500}{105}-42{,}38^2}=\sqrt{1947{,}62-1796{,}06}=\sqrt{151{,}56}=12{,}31$$

$\bar{X}$=m - Prosečna potrošnja šećera iznosi 42,38 kg.

Sn – Minimalno prosečno odstupanje potrošnje šećera od prosečne potrošnje šećera iznosi 12,31 kg.

1. Ho ($\bar{X}\geq 33$) H1 ($\bar{X}<33$)
2. n=105>30 koristimo Z test
3. $-Z_{1-\alpha}=-Z_{1-0,05}=-Z_{0,95}=-1{,}65$ (vrednost iz tablice)
4. Ho se prihvata za Z> -1,65
   Ho se odbacuje za Z≤ -1,65
5. $$Z=\frac{m-\bar{X}_o}{Sn}\sqrt{n-1}=\frac{42{,}38-33}{12{,}31}\sqrt{104}=\frac{9{,}38}{12{,}31}*10{,}198=0{,}76*10{,}198=7{,}75$$

Z=7,75> -1,65 Ho se prihvata naša tvrdnja nije tačna. Prosečna potrošnja šećera je veća od 33.

11. Prost slučajan uzorak dao je sledeći rezultat:

Starost lica u prosveti	**20 – 29**	**30 – 39**	**40 – 49**	**50 – 59**	**60 i više**
Broj anketiranih	**250**	**200**	**130**	**100**	**70**

Uz rizik greške α=0,05 odredi da li može da se prihvati hipoteza:
a) relativno učešće mlađih od 40 godina nije manje od 84%;
b) relativno učešće starijih od 50 godina nije veće od 6%;
v) relativno učešće starijih od 30 godina iznosi 55%.

Rešenje:

U formuli P=f/n; f predstavlja broj podataka iz uzorka koji su izdvojeni po nekom kriterijumu. U ovom slučaju kriterijum je broj anketiranih lica koja su mlađa od 40 godina i njih ima 450 (250+200).

$$n=750 \qquad P=f/n \qquad P=450/750=0{,}6$$

U hipotezama pretpostavljene vrednosti treba pretvoriti u koeficijente, nikada ne upisujemo procentualne vrednosti (84/100=0,84).

a) 1. Ho ($p\leq0{,}84$) H1 ($p>0{,}84$) $\alpha=0{,}05$
2. n=750>30 koristimo Z test
3. $Z_{1-\alpha}= Z_{1-0,05}= Z_{0,95}= 1{,}65$ (vrednost iz tablice)
4. Ho se prihvata za $Z<1{,}65$
 Ho se odbacuje za $Z\geq1{,}65$
5. $$Z=\frac{P-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}, \quad Z=\frac{0{,}6-0{,}84}{\sqrt{\frac{0{,}84(1-0{,}84)}{750}}}=\frac{-0{,}24}{0{,}0134}=-17{,}91$$
Z= -17,91<1,65 pa se Ho prihvata što znači da naša pretpostavka nije tačna. Procenat učešća lica koja su mlađa od 40 godina manji je od 84%.

b) U formuli P=f/n; f predstavlja broj podataka iz uzorka koji su izdvojeni po nekom kriterijumu. U ovom slučaju kriterijum je broj anketiranih lica koja su starija od 50 godina i njih ima 170 (100+70).

$$n=750 \qquad P=f/n \qquad P=170/750=0{,}23$$

1. Ho ($p\geq0{,}06$) H1 ($p<0{,}06$) 6/100=0,06
2. n=750>30 koristimo Z test
3. $-Z_{1-\alpha}= -Z_{1-0,05}= -Z_{0,95}= -1{,}65$ (vrednost iz tablice)
4. Ho se prihvata za $Z> -1{,}65$
 Ho se odbacuje za $Z\leq -1{,}65$
5. $$Z=\frac{P-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}, \quad Z=\frac{0{,}23-0{,}06}{\sqrt{\frac{0{,}06(1-0{,}06)}{750}}}=\frac{0{,}17}{0{,}0087}=19{,}54$$
Z=19,54> -1,65 pa se Ho prihvata što znači da naša pretpostavka nije tačna. Procenat učešća lica koja su starija od 50 godina veći je od 6%.

v) U formuli P=f/n; f predstavlja broj podataka iz uzorka koji su izdvojeni po nekom kriterijumu. U ovom slučaju kriterijum je broj anketiranih lica koja su starija od 30 godina i njih ima 500.

1. Ho (p=0,55) H1 (p≠0,55) 55/100=0,55 P=500/750=0,67
2. n=30 koristimo Z test
3. $Z_{1-\alpha/2}= Z_{1-0,05/2}= Z_{1-0,025}= Z_{0,975}$ =1,96 (vrednost iz tablice)
4. Ho se prihvata za |Z|<1,96
   Ho se odbacuje za |Z|≥1,96
5. $$Z=\frac{P-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}},\quad Z=\frac{0,67-0,55}{\sqrt{\frac{0,55(1-0,55)}{750}}}=\frac{0,12}{0,018}=6,67$$

|Z|=6,67> 1,96 pa se Ho odbacuje što znači da naša pretpostavka nije tačna. Procenat učešća lica koja su starija od 30 godina ne iznosi 55%.

12. Dati su podaci o mesečnom prihodu po domaćinstvima (u 000). Na osnovu intervalne serije podataka:

35 42 21 28 41 38 30 37 39 40 31 30 26 27 25
35 24 31 32 31 40 42 36 41 39 32 27 33 31 44

a) Odredi Mo i Me.
b) Sa rizikom greške 0,02 proveri tvrdnju da procenat domaćinstava koja imaju manje prihode od 37 nije manji od 65%.

Rešenje:

k=1+3,3logn=1+3,3log30=1+3,3*1,477=1+4,87=5,87≈6
i=(44-21)/6=23/6=3,83≈4

x	f	xs	fxs	x2	x2f	Kum.ispod
21-25	3	23	69	529	1587	3
25,1-29	4	27	108	729	2916	7
29,1-33	9	31	279	961	8649	16
33,1-37	4	35	140	1225	4900	20
37,1-41	7	39	273	1521	10647	27
41,1-45	3	43	129	1849	5547	30
∑	30		998	/	34246	—

a) $$Mo=29,1+\frac{9-4}{(9-4)+(9-4)}*4=29,1+\frac{20}{10}=29,1+2=31,1$$

Najveći broj domaćinstava ima mesečni prihod 31100 dinara.

Položaj Me=(n+1)/2=(30+1)/2=31/2=15,5

$$Me = 29,1 + \frac{\frac{30}{2} - 7}{9} * 4 = 29,1 + \frac{32}{9} = 29,1 + 3,56 = 32,66$$

Polovina domaćinstava ima mesečni prihod manji od 32660 dinara, a druga polovina veći.

b) 1. Ho ($p \leq 0,65$) H1 ($p > 0,65$) $\alpha = 0,05$

p=f/n=20/30=0,67

2. n=750>30 koristimo Z test

3. $Z_{1-\alpha} = Z_{1-0,02} = Z_{0,98} = 2,06$ (vrednost iz tablice)

4. Ho se prihvata za Z<2,06

Ho se odbacuje za Z≥2,06

$$Z = \frac{0,67-0,65}{\sqrt{\frac{0,65(1-0,65)}{30}}} = \frac{0,02}{\sqrt{0,0076}} = \frac{0,02}{0,088} = 0,23$$

Z=0,23< 2,06 pa se Ho prihvata što znači da naša pretpostavka nije tačna. Procenat učešća domaćinstava koja imaju manji prihod od 37 nije veći od 65%.

13. Prost slučajan uzorak dao je sledeće rezultate:

Starost lica (h)	**20 – 29**	**30 – 39**	**40 – 49**	**50 – 59**	**60 i više**
Br. anketiranih (f)	**200**	**150**	**80**	**50**	**20**

Ispitati, uz rizik greške od 0,05, da li je moguće prihvatiti sledeće hipoteze:
a) da relativno učešće mlađih od 40 godina nije manje od 84%;
b) da relativno učešće starijih od 50 godina nije veće od 6%;

Rešenje:

a) 1. Ho ($p \leq 0,84$) H1 ($p > 0,84$) $\alpha = 0,05$

p=f/n=350/500=0,7

2. n=500>30 koristimo Z test

3. $Z_{1-\alpha} = Z_{1-0,05} = Z_{0,95} = 1,65$ (vrednost iz tablice)

4. Ho se prihvata za Z<1,65

Ho se odbacuje za Z≥1,65

$$Z=\frac{0{,}7-0{,}84}{\sqrt{\frac{0{,}84(1-0{,}84)}{500}}}=\frac{-0{,}14}{0{,}016}=-8{,}75$$

Z= -8,75< 1,65 pa se Ho prihvata što znači da naša pretpostavka nije tačna. Procenat učešća anketiranih lica koja su mlađa od 40 godina manji je od 84%.

b) 1. Ho (p≥0,06) H1 (p<0,06) 6/100=0,06
2. n=500>30 koristimo Z test
3. $-Z_{1-\alpha}= -Z_{1-0,05}= -Z_{0,95}= -1{,}65$ (vrednost iz tablice)
4. Ho se prihvata za Z> -1,65
   Ho se odbacuje za Z≤ -1,65

$$Z=\frac{0{,}14-0{,}06}{\sqrt{\frac{0{,}06(1-0{,}06)}{500}}}=\frac{0{,}08}{0{,}011}=7{,}27$$

Z= 7,27> -1,65 pa se Ho prihvata što znači da naša pretpostavka nije tačna. Procenat učešća anketiranih lica koja su starija od 50 godina veći je od 84%.

14. Na osnovu grupisane serije podataka o potrošnji salame po domaćinstvu u vidu proste distribucije frekvencija izračunajte:

100 150 95 200 300 95 100 150 380 200 100 250 150
200 100 300 300 250 300 200 300 300 250 250 300 150

Uz rizik od 0,05 proveri hipotezu da procenat učešća domaćinstava koja troše manje salame od 150 kg nije veći od 25%.

Rešenje:

b) 1. Ho (p≥0,25) H1 (p<0,25) 6/26=0,23
2. n=26<30 koristimo t test
3. $-t_{n-1;\alpha}= -t_{n-1;\alpha} = -t_{26-1;0,05} = -t_{25;0,05} = -1{,}7081$ (vrednost iz tablice)
4. Ho se prihvata za Z> -1,7081
   Ho se odbacuje za Z≤ -1,7081

5. $$Z=\frac{p-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}},\quad Z=\frac{0{,}23-0{,}25}{\sqrt{\frac{0{,}25*(1-0{,}25)}{26}}}=\frac{0{,}02}{\sqrt{\frac{0{,}1875}{26}}}=\frac{0{,}02}{\sqrt{0{,}0072}}=\frac{0{,}02}{0{,}085}=0{,}24$$

Z=0,24>1,7081 Ho se prihvata što znači da naša pretpostavka nije tačna

15. Proizvođač masnih konzervi obavezao se da učešće masti u sastojcima neće biti veće od 11%. Ispitivanjem 300 slučajno odabranih konzervi utvrđeno je da 42 konzerve sadrže više od 11% masti. Na nivou značajnosti od 0,05 ispitati da li se proizvođač pridržava date obaveze.

Rešenje:

b) 1. Ho ($p \geq 0{,}11$) H1 ($p<0{,}11$) 42/300=0,14
2. n=300>30 koristimo Z test
3. $-Z_{1-\alpha} = -Z_{1-0,05} = -Z_{0,95} = -1{,}65$ (vrednost iz tablice)
4. Ho se prihvata za Z> -1,65
   Ho se odbacuje za Z≤ -1,65

5. $$Z=\frac{p-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}},\quad Z=\frac{0{,}14-0{,}11}{\sqrt{\frac{0{,}11*(1-0{,}11)}{300}}}=\frac{0{,}03}{\sqrt{\frac{0{,}0979}{300}}}=\frac{0{,}03}{\sqrt{0{,}00033}}=\frac{0{,}03}{0{,}018}=1{,}67$$

Z=1,67>-1,65 Ho se prihvata, naša tvrdnja nije tačna. Proizvođač se ne pridržava obaveze da učešće masti u sastojcima ne prelazi 11%.

16. Sa rizikom greške 0,02 ispitaj da li je % učešća lica koja su mlađa od 35 godina 60%

Starost lica	**15 - 25**	**25 - 35**	**35 - 45**	**45 - 55**	**55 i više**	**∑**
Broj lica	**50**	**80**	**40**	**20**	**10**	**200**

Uz rizik od 0,03 proveri hipotezu da procenat učešća lica koja nisu mlađa od 45 godina nije veći od 10% .

Rešenje:

b) 1. Ho ($p \geq 0{,}10$) H1 ($p<0{,}10$) 170/200=0,85
2. n=200>30 koristimo Z test
3. $-Z_{1-\alpha} = -Z_{1-0,03} = -Z_{0,97} = -1{,}88$ (vrednost iz tablice)
4. Ho se prihvata za Z> -1,88
   Ho se odbacuje za Z≤ -1,88

5. $$Z=\frac{p-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}},\quad Z=\frac{0{,}85-0{,}10}{\sqrt{\frac{0{,}10*(1-0{,}10)}{200}}}=\frac{0{,}75}{\sqrt{\frac{0{,}09}{200}}}=\frac{0{,}75}{\sqrt{0{,}00045}}=\frac{0{,}75}{0{,}021}=35{,}71$$

Z=35,71>-1,88 Ho se prihvata, naša tvrdnja nije tačna.

3. χ^2 test i test nezavisnosti obeležja

3.1. χ^2 test

1. Praćenjem strukture raspodele kredita po regionima zapažena je sledeća relativna raspodela među regionima: A=30%, B=25%, V=20%, G=15%, D=10%.

U 1996. godini sredstva su raspodeljena na sledeći način:

Regioni	A	B	V	G	D
Pozajmljena sredstva	230	215	140	100	150

a) Na nivou značajnosti od α=0,05 testirati prilagođenost empirijskog rasporeda očekivanoj raspodeli sredstava.

Rešenje:

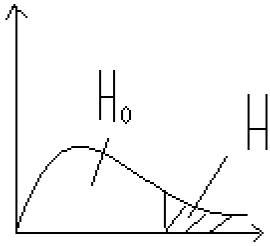
U ovom zadatku neophodno je odrediti očekivane frekvencije f' (ono što smo planirali). Kolonu f' određujemo jednostavno, primenom odgovarajućih procenata na ukupnu vrednost raspodeljenih kredita za sve regione (835).

Za region A očekivanu frekvenciju dobijamo na sledeći način: 30*835/100=251.
Za region B očekivanu frekvenciju dobijamo na sledeći način: 25*835/100=209.
Za region C očekivanu frekvenciju dobijamo na sledeći način: 20*835/100=167.
Za region D očekivanu frekvenciju dobijamo na sledeći način: 15*835/100=125.
Za region E očekivanu frekvenciju dobijamo na sledeći način: 10*835/100=84.
Zbirna vrednost kolone f' iznosi 836, jer smo uzimali približne vrednosti (inače zbir kolone f treba da se poklapa sa zbirom kolone f').

Najpre definišemo hipoteze Ho u kojoj uvek pretpostavljamo da je empirijski raspored u skladu sa očekivanim i H1 u kojoj pretpostavljamo da nije.

Potom određujemo kritičnu vrednost testa čiju vrednost dobijamo iz statističke tablice za χ^2 test. Stepene slobode određujemo prema sledećoj formuli: $v=r-1=5-1=4$ $\alpha=0{,}05$ (rizik greške). Vrednost r predstavlja broj redova, dok je α rizik greške.

Prema formuli za izračunavanje vrednosti χ^2 testa: $\chi^2 = \sum \frac{(fi - fi')^2}{fi'}$, potrebno je otvarati kolone po koracima kao u tabeli. Zbir poslednje kolone je vrednost χ^2 testa.



$K \in (9{,}488;+\infty)$ Oblast odbacivanja nulte hipoteze.

Regioni	%	Pozajmljena sredstva (fi)	Očekivane fi’	fi - fi’	(fi - fi’)^2	$\frac{(fi - fi')^2}{fi'}$
A	30	230	251	-21	441	1,76
B	25	215	209	6	36	0,17
V	20	140	167	-27	729	4,37
G	15	100	125	-25	625	5
D	10	150	84	66	4356	51,86
Σ	100	835	836	-	-	63,16

Ho: Empirijski raspored je saglasan očekivanom
H1: Empirijski rapored nije saglasan očekivanom

$v = r-1 = 5-1 = 4$ $\alpha = 0{,}05$ $\chi^2_{4;0,05} = 9{,}488$ $K \in (9{,}488;+\infty)$ $\chi^2 = 63{,}16$

Na osnovu dobijenog rezultata $\chi^2 = 63{,}16$ spada u oblast odbacivanja nulte hipoteze, pa se H1 priihvata što znači da stvarna raspodela kredita po regionima odstupa od predviđene raspodele.

2. U tabeli je prikazana ostvarena proizvodnja košulja u komadima i planirana proizvodnja u procentima fabrike po pogonima. Ispitaj da li postoje značajna odstupanja ostvarene proizvodnje od planirane sa rizikom greške od 0,05. (16 bodova)

Pogon	Planirana proizvodnja u %	Ostvarena proizvodnja
A	**40**	**650**
B	**20**	**500**
V	**15**	**300**
G	**15**	**200**
D	**10**	**350**
∑	**100**	**2000**

Rešenje:

Pogon	Planirana proizv. %	Ostvarena proizv. (fi)	Očekivane fi’	fi - fi’	(fi - fi’)^2	(fi - fi’)^2 fi’
A	40	650	800	-150	22500	28,125
B	20	500	400	100	10000	25
V	15	300	300	-	-	-
G	15	200	300	-100	10000	33,33
D	10	350	200	150	22500	112,5
Σ	100	2000	2000	-	-	198,955

Ho: Empirijski raspored je saglasan očekivanom
H1: Empirijski rapored nije saglasan očekivanom

$\nu = r - 1 = 5 - 1 = 4$ $\alpha = 0,05$ $\chi^2_{4;0,05} = 9,488$

$K \in (9,488; +\infty)$ $\chi^2 = 198,955$ Ho se odbacuje, H1 se prihvata, ostvarena proizvodnja košulja po pogonima nije u skladu sa očekivanom.

3. Uz rizik greške 0,05 proveri da li je broj upisanih učenika u srednjim školama školske 2014/15. godine u skladu sa očekivanjima.

Škole	**A**	**B**	**V**	**G**	**D**	**Đ**
Broj dece	**232**	**313**	**360**	**130**	**52**	**70**
Planirani broj upisanih	**21%**	**33%**	**25%**	**13%**	**5%**	**3%**

Rešenje:

Škole	Ostvareno. (fi)	Planirano %	Očekivane fi’	fi - fi’	(fi - fi’)^2	(fi - fi’)^2 fi’
A	232	21	242,97	-10,97	120,34	0,50
B	313	33	381,81	-68,81	4734,82	12,40
V	360	25	289,25	70,75	5005,56	17,31
G	130	13	150,41	-20,41	416,57	2,77
D	52	5	57,85	-5,85	34,22	0,59
Đ	70	3	34,71	35,29	1245,38	35,88
Σ	1157	100	1157	-	-	69,44

Ho: Broj upisanih đaka je u skladu sa planiranim brojem upisanih đaka
H1: Broj upisanih đaka nije u skladu sa planiranim brojem upisanih đaka.

$$v = r - s - 1 = 6 - 1 = 5 \qquad \chi^2_{v;\alpha} = \chi^2_{5;0,05} = 11,07$$

$$K \in (11,07; +\infty) \qquad \chi^2 = 69,44 > 11,07$$

Ho se odbacuje, H1 se prihvata, broj upisanih učenika u srednjim školama nije u skladu sa očekivanim brojem upisanih učenika školske 2014/15.

3.2. Test nezavisnosti obeležja

1. Uz rizik greške od 0,05 ispitajte da li izbor vrste cigareta zavisi od pola. Ukoliko testom utvrdite da postoji zavisnost između pola i vrste cigareta odredite intenzitet veze.

Pol (y) r s	Vrsta cigareta			
	Duge 100 s	Standardne	Tanke Slims	Σ
Ž	40	80	30	150
M	30	120	50	200
Σ	70	200	80	350

Rešenje:

Ho: Izbor vrste cigareta ne zavisi od pola.
H1: Izbor vrste cigareta zavisi od pola.
χ^2 (r-1)(s-1);α= χ^2 (3-1)(2-1);0,05= χ^2 2*1;0,05= χ^2 2;0,05=5,99 (vrednost iz tablice)

$$\chi^2 = \sum \frac{(fij - fij')^2}{fij'}$$

fij' određujemo redom za svaku vrednost množenjem zbira kolone u kojoj se ta vrednost nalazi sa zbirom reda u kome se vrednost nalazi i deljenjem tog proizvoda veličinom uzorka (n=350).

Vrednosti fij': 70*150/350=30 200*150/350=85,71 80*150/350=34,29
70*200/350=40 200*200/350=114,29 80*200/350=45,71

fij	fij'	fij-fij'	$(fij-fij')^2$	$(fij-fij')^2/fij'$
40	30	10	100	3,33
80	85,71	-5,71	32,6	0,38
30	34,29	-4,29	18,4	0,54
30	40	-10	100	2,5
120	114,29	5,71	32,6	0,29
50	45,71	4,29	18,4	0,4
Σ	-	-	-	7,44

χ^2=7,44>5,99 H1 se prihvata i zaključujemo da izbor vrste cigareta zavisi od pola.

Uz pomoć koeficijenta kontigencije odredićemo intenzitet veze.

$$Cmax=\sqrt{\frac{(r-1)}{r}}=\sqrt{\frac{(3-1)}{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{0,67}=0,82$$

$$C=\sqrt{\frac{\chi^2}{n+\chi^2}}=\sqrt{\frac{7,44}{350+7,44}}=\sqrt{\frac{7,44}{357,44}}=\sqrt{0,02}=0,14$$

Na osnovu vrednosti koeficijenta kontigencije utvrdili smo da između pojava postoji slaba veza.

2. Uz rizik greške od 0,05 ispitajte da li vrsta leka utiče na zdravstveno stanje bolesnika. Ukoliko testom utvrdite da postoji zavisnost između posmatranih pojava odredite intenzitet veze.

Rešenje:

Lek (y) r s	Stanje bolesnika			
	Nisu ozdravili	Osećaju poboljšanje	Potpuno su ozdravili	Σ
A	30	9	12	51
B	12	13	18	43
C	8	15	17	40
D	10	12	9	31
Σ	60	49	56	165

Rešenje:

Ho: Zdravstven stanje bolesnika ne zavisi od leka.
H1: Zdravstveno stanje bolesnika zavisi od leka.
χ^2 (r-1)(s-1);α= χ^2 (3-1)(4-1);0,05= χ^2 2*3;0,05= χ^2 6;0,05=12,592 (vrednost iz tablice)

$$\chi^2=\sum\frac{(fij-fij')^2}{fij'}$$

fij' određujemo redom za svaku vrednost množenjem zbira kolone u kojoj se ta vrednost nalazi sa zbirom reda u kome se vrednost nalazi i deljenjem tog proizvoda veličinom uzorka (n=165).

Vrednosti fij': 60*51/165=18,55 49*51/165=15,15 56*51/165=17,31
60*43/165=15,64 49*43/165=12,77 56*43/165=14,59
60*40/165=14,55 49*40/165=11,89 56*40/165=13,58
60*31/165=11,27 49*31/165=9,21 56*31/165=10,52

$$Cmax=\sqrt{\frac{(r-1)}{r}}=\sqrt{\frac{(3-1)}{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{0{,}67}=0{,}82$$

fij	fij'	fij-fij'	(fij-fij')^2	(fij-fij')^2/fij'
30	18,55	11,45	131,1	7,07
9	15,15	-6,15	37,82	2,49
12	17,31	-5,31	28,19	1,63
12	15,64	-3,64	12,25	0,78
13	12,77	0,23	0,05	0,004
18	14,59	3,41	11,63	0,797
8	14,55	6,35	42,9	2,95
15	11,89	3,11	9,67	0,81
17	13,58	3,42	11,69	0,86
10	11,27	-1,27	1,61	0,14
12	9,21	2,79	7,78	0,84
9	10,52	-1,52	2,31	0,22
Σ	-	-	-	18,59

$\chi^2=18{,}59>12{,}592$ H1 se prihvata i zaključujemo da zdravstveno stanje bolesnika zavisi od leka.

$$C=\sqrt{\frac{\chi^2}{n+\chi^2}}=\sqrt{\frac{18{,}59}{165+18{,}59}}=\sqrt{\frac{18{,}59}{183{,}59}}=\sqrt{0{,}101}=0{,}32$$

Između pojava postoji neznatna direktna korelaciona veza.

3. Uz rizik greške od 0,05 ispitajte da li radno iskustvo utiče na broj neispravnih proizvoda. Ukoliko testom utvrdite da postoji zavisnost između posmatranih pojava odredite intenzitet veze.

Broj neispravnih proizvoda (y) r s	Dužina radnog iskustva				
	Do 10	10-20	20-30	30 i više	Σ
Do 3	18	15	10	4	47
4 - 7	20	11	9	6	46
8 -11	15	13	8	5	41
12 - 15	4	7	5	3	19
Σ	57	46	32	18	153

Rešenje:

U tabeli se javljaju male očekivane frekvencije fij<5, pa je potrebno izvršiti pregrupisavanje podataka.

Broj neispravnih proizvoda (y) r s	Dužina radnog iskustva			
	Do 10	10-20	20-30	Σ
Do 3	18	15	14	47
4 - 7	20	11	15	46
8 -11	19	20	21	60
Σ	57	46	50	153

Ho: Broj neispravnih proizvoda ne zavisi od dužine radnog staža

H1: Broj neispravnih proizvoda zavisi od dužine radnog staža

χ^2 (r-1)(s-1);α= χ^2 (3-1)(3-1);0,05= χ^2 2*2;0,05= χ^2 4;0,05=9,488 (vrednost iz tablice)

$$\chi^2 = \sum \frac{(fij - fij')^2}{fij'}$$

fij' određujemo redom za svaku vrednost množenjem zbira kolone u kojoj se ta vrednost nalazi sa zbirom reda u kome se vrednost nalazi i deljenjem tog proizvoda veličinom uzorka (n=153).

$$Cmax = \sqrt{\frac{(r-1)}{r}} = \sqrt{\frac{(3-1)}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{0{,}67} = 0{,}82$$

fij	fij'	fij-fij'	$(fij-fij')^2$	$(fij-fij')^2/fij'$
18	17,51	0,49	0,24	0,014
15	14,13	0,87	0,76	0,054
14	15,36	-1,36	1,85	0,12
20	17,14	2,86	8,18	0,48
11	13,83	2,83	8,01	0,58
15	15,03	0,03	0,0009	0,00006
19	22,35	-3,35	11,22	0,5
20	18,04	0,96	0,92	0,05
21	19,6	1,4	1,96	0,1
Σ	-	-	-	1,898

χ^2=1,898<9,488 Ho se prihvata i zaključujemo da broj neispravnih proizvoda ne zavisi od dužine radnog staža. Pošto su posmatrane pojave nezavisne, nije potrebno određivati koeficijent kontigencije.

4. Sa rizikom greške 0,05 ispitajte zavisnost između tipa automobila i potrošnje goriva. Ukoliko testom utvrdite da postoji zavisnost između posmatranih pojava odredite intenzitet veze.

Potrošnja goriva r s	Tip automobila				
	M	S	G	Z	Σ
Do 6	20	13	16	11	60
6 – 12	10	10	15	19	54
12 i više	5	7	9	8	29
Σ	35	30	40	38	143

Rešenje:

Ho: Potrošnja goriva ne zavisi od tipa automobila
H1: Potrošnja goriva zavisi od tipa automobila

χ^2 (r-1)(s-1);α= χ^2 (4-1)(3-1);0,05= χ^2 3*2;0,05= χ^2 6;0,05=12,592 (vrednost iz tablice)

$$\chi^2 = \sum \frac{(fij - fij')^2}{fij'}$$

fij' određujemo redom za svaku vrednost množenjem zbira kolone u kojoj se ta vrednost nalazi sa zbirom reda u kome se vrednost nalazi i deljenjem tog proizvoda veličinom uzorka (n=143).

fij	fij'	fij-fij'	(fij-fij')^2	(fij-fij')^2/fij'
20	14,69	5,31	28,196	1,92
13	12,59	0,41	0,17	0,01
16	16,78	0,78	0,61	0,04
11	15,94	4,94	24,4	1,53
10	13,22	3,22	0,24	0,02
10	11,33	1,33	1,77	0,16
15	15,10	0,10	0,01	0,0007
19	14,35	4,65	21,62	1,51
5	7,098	-2,098	4,40	0,62
7	6,08	0,92	0,85	0,14
9	8,11	0,89	0,11	0,01
8	7,71	0,29	0,08	0,01
Σ	-	-	-	5,97

χ^2=5,97<12,592 Ho se prihvata i zaključujemo da potrošnja goriva ne zavisi od tipa automobila. Pošto su posmatrane pojave nezavisne, nije potrebno određivati koeficijent kontigencije.

4. Regresija i korelacija

1. Na osnovu podataka date tabele:

Cena gvožđa po t (x)	**110**	**100**	**90**	**80**	**70**	**60**
Tražnja (y)	**20**	**30**	**35**	**50**	**65**	**70**

a) Pomoću linije regresije izračunajte funkciju tražnje kao zavisno promenljive i cene gvožđa kao nezavisno promenljive.
b) izračunajte koeficijent determinacije.

Rešenje:

x	y	x^2	Y^2	X*Y
110	20	12100	400	2200
100	30	10000	900	3000
90	35	8100	1225	3150
80	50	6400	2500	4000
70	65	4900	4225	4550
60	70	3600	4900	4200
510	270	45100	14150	21100

$$y_i = B_0 + B_1 X \qquad B_1 = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - (\sum x)^2} \qquad B_0 = \bar{y} - B_1 \bar{x}$$

$$B_1 = \frac{6*21100-510*270}{6*45100-260100} = \frac{126600-137700}{270600-260100} = \frac{-11100}{10500} = -1{,}06$$

$$B_0 = \frac{270}{6} + 1{,}06 * \frac{510}{6} = 45+90{,}1=135{,}1$$

Parametar bo je odsečak na y osi. U ovom primeru parametar bo pokazuje da maksimalna tražnja iznosi 135,1t. Parametar b1 pokazuje koliko se menja promenljiva y ukoliko se promenljiva x promeni za 1. U ovom primeru parametar b1 iznosi -1,06, a to znači da kada se cena poveća za 1 dolazi do pada tražnje za 1,06 t.

$$y_i = -1{,}06 + 135{,}1x \qquad R^2 = B_1^{\,2} \frac{\sum x^2 - n\bar{x}^2}{\sum y^2 - n\bar{y}^2}$$

$$R^2=(-1{,}06)^2\frac{45100-6*\frac{510}{6}}{14150-6*\frac{270}{6}}=1{,}1236\frac{44590}{13880}=1{,}1236*2{,}21=3{,}61$$

Na osnovu koeficijenta determinacije zaključujemo da je 3,61% varijabiliteta tražnje uslovljeno promenom cene.

2. Na osnovu podataka o kretanju zarada i investicija u jednom preduzeću, ispitati da li između varijacija ovih pojava postoji kvantitativno slaganje i u kojoj meri.

Zarade u (000) dinara (x)	**12**	**15**	**14**	**18**	**20**	**20**	**21**	**23**
Investicije u (000) dinara (y)	**4**	**6**	**5**	**7**	**9**	**10**	**12**	**12**

Rešenje:

x	y	x^2	Y^2	X*Y
12	4	144	16	48
15	6	225	36	90
14	5	196	25	70
18	7	324	49	126
20	9	400	81	180
20	10	400	100	200
21	12	441	144	252
23	12	529	144	276
143	65	2659	595	1242

$$r=\frac{N\sum XY-\sum X\sum Y}{\sqrt{N\sum X^2-(\sum X)^2}\sqrt{N\sum Y^2-(\sum Y)^2}}=\frac{8*1242-143*65}{\sqrt{8*2659-(143)^2}\sqrt{8*595-(65)^2}}$$

$$r=\frac{9936-9295}{\sqrt{21272-20449}\sqrt{4760-4225}}=\frac{641}{\sqrt{823}\sqrt{535}}=\frac{641}{28{,}69*23{,}13}=\frac{641}{663{,}59}=0{,}97$$

Na osnovu koeficijenta korelacije utvrđujemo da između pojava postoji veoma visoko direktno kvantitativno slaganje.

$R^2 = 0{,}97^2 = 0{,}94$ Na osnovu koeficijenta determinacije zaključujemo da je 94% varijabiliteta investicija uslovljeno promenom zarada.

3. Na osnovu tabele odredite funkciju regresione prave i standardnu grešku regresije, kao i koeficijent determinacije.

Površina parcele (x)	8	1	8	19	7	19	4	1
Prinos u tonama (y)	9	1	14	21	13	22	6	1

Rešenje:

Površina parcele (x)	Prinos u tonama (y)	X^2	xv	y^2
8	9	64	72	81
1	1	1	1	1
8	14	64	112	196
19	21	361	399	441
7	13	49	91	169
19	22	361	418	484
4	6	16	24	36
1	1	1	1	1
67	87	917	1118	1409

$$yc = bo + b_1 x = 1{,}713 + 1{,}094x \quad bo = \bar{y} - B_1 \bar{x} = \frac{87}{8} - 1{,}094 * \frac{67}{8} = 10{,}875 - 9{,}162 = 1{,}713$$

$$b_1 = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - (\sum x)^2} = \frac{8*1118 - 67*87}{8*917 - (67)^2} = \frac{8944-5829}{7336-4489} = \frac{3115}{2847} = 1{,}094$$

$$Se = \sqrt{\frac{\sum y^2 - Bo\sum y - B1\sum xy}{n-2}} = \sqrt{\frac{1409 - 1{,}713*87 - 1{,}094*1118}{8-2}} = \sqrt{\frac{1409 - 149{,}03 - 1223{,}092}{6}}$$

$$Se = \sqrt{\frac{36{,}878}{6}} = \sqrt{6{,}1463} = 2{,}479$$

$$R^2 = B_1^2 \frac{\sum x^2 - n\bar{X}^2}{\sum y^2 - n\bar{y}^2} = 1{,}094^2 * \frac{917 - 8*8{,}375^2}{1409 - 8*10{,}875^2} = 1{,}197 * \frac{355{,}88}{462{,}87} = 0{,}9203$$

4. Na osnovu podataka iz tabele odredi koeficijent proste linearne korelacije.

Uspeh iz statistike (xi)	**36**	**50**	**60**	**65**	**70**	**80**	**90**	**100**
Uspeh iz računovodstva (yi)	**35**	**60**	**45**	**68**	**83**	**85**	**88**	**95**

Rešenje:

x	y	X^2	Y^2	xy
36	35	1296	1225	1260
50	60	2500	3600	3000
60	45	3600	2025	2700
65	68	4225	4624	4420
70	83	4900	6889	5810
80	85	6400	7225	6890
90	88	8100	7744	7920
100	95	10000	9025	9500
551	550	41021	42357	41410

$$R = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{\sqrt{n\sum x^2 - (\sum x)^2}\sqrt{n\sum y^2 - (\sum y)^2}},$$

$$R = \frac{8*41410 - 551*550}{\sqrt{8*41021 - 551^2}\sqrt{8*42357 - 550^2}} = \frac{331280 - 308009}{\sqrt{328168 - 303601}\sqrt{338856 - 312481}}$$

$$R = \frac{23271}{\sqrt{24567{,}1}\sqrt{26375}} = \frac{23271}{156{,}74*162{,}4} = \frac{23271}{25454{,}58} = 0{,}9142$$

5. Prost slučajan uzorak dao je sledeće podatke:

Sredstva za propagandu (xi)	**11**	**15**	**3**	**4**	**20**	**13**	**22**	**5**	**18**	**6**
Prodaja u 000 komada (yi)	**8**	**10**	**6**	**5**	**13**	**13**	**15**	**3**	**15**	**6**

Odredi koeficijent proste linearne korelacije na bazi uzorka.

Rešenje:

x	y	X^2	Y^2	xy
11	8	121	64	88
15	10	225	100	150
3	6	9	36	18
4	5	8	25	20
20	13	400	169	260
13	13	169	169	169
22	15	484	225	330
5	3	25	9	15
18	15	324	225	270
6	6	36	36	36
117	94	1801	1058	1356

$$R=\frac{n\sum xy-\sum x\sum y}{\sqrt{n\sum x^2-\left(\sum x\right)^2}\sqrt{n\sum y^2-\left(\sum y\right)^2}},$$

$$R=\frac{10*1356-117*94}{\sqrt{10*1801-117^2}\sqrt{10*1058-94^2}}=\frac{13560-10998}{\sqrt{18010-13689}\sqrt{10580-8836}}$$

$$R=\frac{2562}{\sqrt{4321}\sqrt{1744}}=\frac{2562}{65{,}73*41{,}76}=\frac{2562}{2744{,}88}=0{,}93$$

4.1. Korelacija ranga

1. Pomoću Spirmanovog koeficijenta korelacije odredi da li između varijacija posmatranih pojava h i u postoji kvantitativno slaganje.

Gradovi	**A**	**B**	**V**	**G**	**D**	**Đ**	**E**	**Ž**	**Z**	**I**
Cene slanine (h)	**38**	**36**	**34**	**45**	**39**	**32**	**26**	**34**	**36**	**33**
Cene svinjskog mesa (u)	**22**	**28**	**30**	**39**	**17**	**19**	**15**	**24**	**28**	**22**

Rešenje:

Rangiranje podata vrši se od najvećeg do najmanjeg. Svakom broju treba dodeliti odgovarajući redni broj. Ukoliko se pojave dve iste vrednosti one dele mesto koje bi trebalo da zauzme jedna vrednost i naredno mesto. Tako, kod rangiranja kolone x najveća vrednost je 45 i ona dobija vrednost ranga 1. Posle nje su 39 čija je vrednost ranga 2 i 38 čija je vrednost ranga 3. Sledeća vrednost po veličini je 36, ali javlja se dva puta pa bi te vrednosti zauzele 4. i 5. mesto. Međutim, pošto je reč o istoj vrednosti one moraju imati isto mesto na rang listi tako da im dodeljujemo (4+5)/2=4,5. Sledeći redni broj koji je slobodan je 6, ali sledeća vrednost po veličini je 34 i ona se javlja dva puta. Za vrednost 34 određujemo mesto na rang listi (6+7)/2=6,5. Sledeća vrednost je 33 i dobira redni broj 8. Deveto mesto dodeljujemo broju 32, a deseto broju 26. Na sličan način rangiramo podatke iz kolone y. Vrednosti za d(xy) određujemo oduzimanjem ranga y od ranga x. U poslednjoj koloni prethodni rezultat kvadriramo.

Gradovi	Cene slanine (x)	Cene svinjskog mesa (y)	Rang x	Rang y	d(xy)	$d(xy)^2$
A	38	22	3	6,5	-3,5	12,25
B	36	28	4,5	3,5	1	1
V	34	30	6,5	2	4,5	20,25
G	45	39	1	1	0	0
D	39	17	2	9	-7	49
Đ	32	19	9	8	1	1
E	26	15	10	10	0	0
Ž	34	24	6,5	5	1,5	2,25
Z	36	28	4,5	3,5	1	1
I	33	22	8	6,5	1,5	2,25
						Σ89

$$r_s = 1 - \frac{6\sum di^2}{N(N^2-1)}$$

Rs=1-6*89/10*(100-1)=1-534/990=1-0,5394=0,46 Između pojava postoji neznatna direktna korelaciona veza.

2. Pomoću Spirmanovog koeficijenta korelacije odredi da li između varijacija posmatranih pojava h i u postoji kvantitativno slaganje.

Gradovi	**A**	**B**	**V**	**G**	**D**	**Đ**	**E**	**Ž**	**Z**	**I**
Cene slanine (h)	**29**	**33**	**39**	**40**	**36**	**39**	**36**	**33**	**37**	**40**
Cene svinjskog mesa (u)	**30**	**18**	**23**	**36**	**31**	**32**	**18**	**32**	**30**	**35**

Rešenje:

Gradovi	Cene slanine (x)	Cene svinjskog mesa (y)	Rang x	Rang y	d(xy)	$d(xy)^2$
A	29	30	10	6,5	3,5	12,25
B	33	18	8,5	9,5	-1	1
V	39	23	3,5	8	-4,5	20,25
G	40	36	1,5	1	0,5	0,25
D	36	31	6,5	5	1,5	2,25
Đ	39	32	3,5	3,5	0	0
E	36	18	6,5	9,5	-3	9
Ž	33	32	8,5	3,5	5	25
Z	37	30	5	6,5	-1,5	2,25
I	40	35	1,5	2	-0,5	0,25
						Σ72,5

Rs=1- 6*72,5/10*(100-1)=1-435/990=1-0,44=0,56 Između pojava postoji znatna direktna korelacija.

3. Pomoću Spirmanovog koeficijenta korelacije ispitaj stepen slaganja između broja stanovnika u pojedinim mestima i broja prodavnica u tim mestima..

Grad	Broj stanovnika	Broj prodavnica
I	**31**	**72**
II	**32**	**82**
III	**32**	**91**
IV	**40**	**91**
V	**43**	**91**
VI	**50**	**202**
VII	**57**	**95**
VIII	**60**	**110**
IX	**561**	**125**

Rešenje:

Grad	Broj stanovnika x	Broj prodavnica y	Rang x	Rang y	d(xy)	$d(xy)^2$
I	31	72	9	9	-	-
II	32	82	7,5	8	-0,5	0,25
III	32	91	7,5	6	0,5	0,25
IV	40	91	6	6	-	-
V	43	91	5	6	-1	1
VI	50	202	4	1	3	9
VII	57	95	3	4	1	1
VIII	60	110	2	3	-1	1
IX	561	125	1	2	-1	1
						Σ13,5

Rs=1-6*13,5/9*(81-1)=1-81/9*80=1-81/720=1-0,1125=0,8875
Između pojava postoji visoka direktna korelacija.

4. Posmatrano je 8 radnika jednog preduzeća i dobijeni su sledeći podaci:

Radnik	Rang lista po produktivnosti (x)	Dužina radnog staža (y)	Vrednost spreme po radniku (z)
A	**1**	**10**	**41**
B	**2**	**10**	**35**
V	**3**	**7**	**39**
G	**4**	**16**	**40**
D	**5**	**8**	**33**
Đ	**6**	**4**	**29**
E	**7**	**12**	**30**
Ž	**8**	**5**	**30**

Preko rangiranja proveri da li je veći stepen slaganja sa dužinom radnog staža ili vrednošću spreme po radniku.

Rešenje:

Radnik	Rang lista po produkti-vnosti (x)	Dužina radnog staža (y)	Vrednost spreme po radniku (z)	Rang y	Rang z	d(xy)	$d(xy)^2$	d(xz)	$d(xz)^2$
A	1	10	41	3,5	1	-2,5	6,25	-	-
B	2	10	35	3,5	4	-1,5	2,25	-2	4
V	3	7	39	6	3	-3	9	-	-
G	4	16	40	1	2	3	9	2	4
D	5	8	33	5	5	-	-	-	-
Đ	6	4	29	8	8	2	4	-2	4
E	7	12	30	2	6,5	5	25	0,5	0,25
Ž	8	5	30	7	6,5	1	1	1,5	2,25
							Σ56,5		Σ14,5

Rs(xy)=1-6*56,5/8*(64-1)=1-339/8*63=1-339/504=1-0,67=0,33
Rs(xz)=1-6*14,5/8*(64-1)=1-84/8*63=1-84/504=1-0,17=0,83
Veći je stepen slaganja produktivnosti radnika sa vrednošću spreme po radniku.

5. Analiza vremenskih serija

5.1. Linearni trend

1. Godišnji promet u jednom preduzeću je:

Godine	1992	1993	1994	1995	1996	1997
Promet (u)	20	30	25	31	25	37

Izračunaj:

a) linearni trend; **b) geometrijsku stopu rasta;**

v) predvidi promet za 2001. godinu; **g) standardnu grešku trenda.**

Rešenje:

Da bi odredili linearni trend oslanjamo se na formulu za izračunavanje linearnog renda: $y_t=b_o+b_1x$. Bo se računa pomoću formule: $b_o=\frac{\sum y}{N}$, dok se b1 računa na sledeći način: $b_1=\frac{\sum xy}{\sum x^2}$. Parametar bo pokazuje prosečan nivo vremenske serije u posmatranom periodu, a parametar b_1 pokazuje srednji apsolutni porast (+) ili opadanje (-) u zavisnosti od predznaka.

S obzirom na to da u tabeli nemamo vrednosti za x, imamo samo vrednosti za y, sami određujemo vrednosti za x prema sledećim pravilima:

-kada imamo paran broj podataka pronađemo sredinu serije (n/2). U tom slučaju imamo dva broja koja su na sredini, brojeći odozdo i odozgo i tim brojevima dodelimo vrednosti -0,5 i 0,5. Zatim, povećavamo za 1 udaljavajući se od sredine tako da naviše idu vrednosti redom: -1,5; -2,5; -3,5;....; a naniže idu vrednosti: 1,5; 2,5; 3,5;.....
-kada imamo neparan broj podataka pronađemo sredinu serije ((n+1)/2). U tom slučaju imamo jedan broj koji je na sredini i njemu dodelimo vrednost 0 (nula). Zatim, povećavamo za 1 udaljavajući se od sredine tako da naviše idu vrednosti redom: -1; -2; -3;....; a naniže idu vrednosti: 1; 2; 3;.....

U ovom primeru imamo 6 podataka. Pošto je paran broj podataka, za određivanje kolone x pronalazimo sredinu: n/2=6/2=3. Pronalazimo treći član brojeći odozgo i dodeljujemo mu vrednost -0,5. Trećem članu računajući odozdo dodeljujemo vrednost 0,5. Nadalje popunjavamo kolonu x prema prethodno objašnjenom pravilu.

Godine	Promet (Y)	x	X^2	xy	yt	$(y\text{-}yt)^2$
1992	20	-2,5	6,25	-50	22,575	6,63
1993	30	-1,5	2,25	-45	24,745	27,62
1994	25	-0,5	0,25	-12,5	36,92	3,69
1995	31	0,5	0,25	15,5	29,09	3,65
1996	25	1,5	2,25	37,5	31,26	39,19
1997	37	2,5	6,25	92,5	33,425	12,78
Σ	168	-	17,5	38	168,015	93,56

a)

Za izračunavanje bo potrebna nam je zbirna vrednost kolone y i ona iznosi 168.

$$bo=\frac{\sum y}{N}=\frac{168}{6}=28$$

Za izračunavanje vrednosti b1 potreban nam je zbir kolone x*y i kolone x^2 tako da otvaramo te kolone.

$$b_1=\frac{\sum xy}{\sum x^2}=\frac{38}{17{,}5}=2{,}17$$

Dobijamo linearni trend: yt=bo+b1x= 28+2,17x

b) Za geometrijsku stopu rasta nam je potrebna vrednost za yn=37 (poslednja vrednost za y) i y_1=20 (prva vrednost u koloni y).

$$Rs=\left(\sqrt[n-1]{\frac{yn}{y1}}-1\right)*100\% \quad Rs=\left(\sqrt[5]{\frac{37}{20}}-1\right)*100=\left(\frac{1}{5}log1{,}85-1\right)*100$$

$$Rs=\left(\frac{0{,}26717}{5}-1\right)*100=\left(N\,0{,}053434-1\right)*100=(1{,}131-1)*100$$

$$Rs=0{,}131*100=13{,}10\%$$

Godišnji tempo rasta prometa iznosi 13,10%.

v) Da bi odredili promet u 2001. godini na osnovu linearnog trenda neophodno je da odredimo vrednost x u 2001. godini. Ukoliko je vrednost x u 1997. 2,5 i dodajemo po 1, na osnovu tog pravila određujemo da je x u 2001. 6,5.

Promet u 2001. iznosi: yt(2001)=28+2,17*6,5=42,105

g) Standardna greška trenda predstavlja odstupanje linije trenda od originalnih podataka i izračunava se na sledeći način:

$$Syt=\sqrt{\frac{\sum(y-yt)^2}{N}}=\sqrt{\frac{93.56}{6}}=\sqrt{15{,}59}=3{,}95$$

Za izračunavanje standardne greške trenda otvaramo dve kolone. Najpre otvaramo kolonu y-yt, a potom otvaramo kolonu $(y\text{-}yt)^2$ zbog toga što nam je potreban zbir te kolone prema formuli.

2. Prihod u 000 dinara jedne fabrike od 1985 – 1994. godine je:

Godine	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994
Prihod u 000 dinara (u)	10	15	16	19	20	23	27	30	32	33

a) izračunaj geometrijsku stopu rasta.
b) na osnovu linearnog trenda predvidi prihod za 1998. godinu.
v) odredi standardnu grešku trenda.

Rešenje:

Godine	Prihod u 000 (y)	x	X^2	xy	yt	$(y\text{-}yt)^2$
1985	10	-4,5	20,25	-45	11	1
1986	15	-3,5	12,25	-52,5	14	1
1987	16	-2,5	6,25	-40	16	0
1988	19	-1,5	2,25	-28,5	19	0
1989	20	-0,5	0,25	-10	21	1
1990	23	0,5	0,25	11,5	24	1
1991	27	1,5	2,25	40,5	26	1
1992	30	2,5	6,25	75	29	1
1993	32	3,5	12,25	112	31	1
1994	33	4,5	20,25	148,5	34	1
∑	225	-	82,5	211,5	225	8

a)

$$Rs= \left(\sqrt[n-1]{\frac{yn}{y1}} - 1\right) * 100\% \quad rs=\left(\sqrt[9]{\frac{33}{10}} - 1\right) * 100 = \left(\frac{1}{9} log3{,}3 - 1\right) * 100$$

$$rs=\left(\frac{0{,}5185}{9}-1\right)*100=\left(\sqrt{0{,}05761} - 1\right)*100=(1{,}14185-1)*100=0{,}1419*100$$

$$rs=14{,}19\%$$

b) $bo = \frac{\sum y}{n} = \frac{225}{10} = 22{,}5 \qquad b_1 = \frac{\sum xy}{x^2} = \frac{211{,}5}{82{,}5} = 2{,}56$

yt=bo+b1x=22,5+2,56x

Prihod u 1998. godini iznosi: yt(1998)=22,5+2,56*8,5=44,26

v) $Sy = \sqrt{\frac{\sum(y-yt)^2}{n}} = \sqrt{\frac{8}{10}} = \sqrt{0{,}8} = 0{,}89$

3. Na osnovu tabele odredi:

a) funkciju linearnog trenda,

b) standardnu grešku funkcije trenda,

v) predvidi kretanje proizvodnje za 2000. godinu.

Godina	1983.	1984.	1985.	1986.	1987.	1988.	1989.
Proizvodnja gvožđa (y)	2	3	6	9	10	12	15

Godina	1990.	1991.	1992.	1993.	1994.
Proizvodnja gvožđa (y)	17	20	23	27	30

Rešenje:

Godina	Proizvodnja gvožđa y	x	X^2	xy	yt	y-yt	$(y-yt)^2$
1983	2	-5,5	30,25	-11	0,64	1,36	1,85
1984	3	-4,5	20,25	-13,5	3,16	-0,16	0,03
1985	6	-3,5	12,25	-21	5,68	0,32	0,1
1986	9	-2,5	6,25	-22,5	8,2	0,8	0,64
1987	10	-1,5	2,25	-15	10,72	-0,72	0,52
1988	12	-0,5	0,25	-6	13,24	-1,24	1,54
1989	15	0,5	0,25	7,5	15,76	-0,76	0,58
1990	17	1,5	2,25	25,5	18,28	-1,28	1,64
1991	20	2,5	6,25	50	20,8	-0,8	0,64
1992	23	3,5	12,25	80,5	23,32	-0,32	0,1
1993	27	4,5	20,25	121,5	25,84	1,16	1,35
1994	30	5,5	30,25	165	28,36	1,64	2,69
Σ	174	-	-	361	-	-	11,68

a)

$$yt=bo+b_1x \quad bo=\frac{\sum y}{N}\frac{174}{12}=14{,}5 \quad b_1=\frac{\sum xy}{\sum x^2}=\frac{361}{143}=2{,}52 \quad yt=14{,}5+2{,}52x$$

b)

$$S_y=\sqrt{\frac{\sum(y-yt)^2}{N}}=\sqrt{\frac{11{,}68}{12}}=\sqrt{0{,}9733}=0{,}9867$$

v) za 2000. godinu vrednost za x=11,5

yt=14,5+2,52*11,5=14,5+28,98=43,48

4. Na osnovu podataka datih u tabeli:

Godina	**1990.**	**1991.**	**1992.**	**1993.**	**1994.**	**1995.**	**1996.**	**1997.**	**1998**
Proizvodnja	**50**	**71**	**100**	**150**	**213**	**214**	**366**	**430**	**435**

a) linearni trend; **b) predvidite trend za 2005. godinu;**

v) godišnji tempo rasta.

Rešenje:

Godina	Proizvodnja	x	X^2	xy	yt
1990	50	-4	16	-200	11,24
1991	71	-3	9	-213	64,79
1992	100	-2	4	-200	118,34
1993	150	-1	1	-150	171,89
1994	213	0	0	-	225,44
1995	214	1	1	214	278,99
1996	366	2	4	732	332,54
1997	430	3	9	1290	386,09
1998	435	4	16	1740	439,64
Σ	2029	-	60	3213	2028,96

a)

$$yt=bo+b_1x \quad bo=\frac{\sum y}{N}=\frac{2029}{9}=225{,}44 \quad b_1=\frac{\sum xy}{\sum x^2}=\frac{3213}{60}=53{,}55$$

b) yt=225,44+53,55x   yt2005=225,44+53,55*11=814,49

v)

$$Rs=\left(\sqrt[9-1]{\frac{435}{50}}-1\right)*100\%=\left(\frac{1}{8}log8{,}7-1\right)*100\%=\left(\frac{0{,}93952}{8}-1\right)*100\%$$

$$Rs=(\sqrt{0{,}11744}-1)*100\%=(1{,}31051-1)*100\%=31{,}051\%$$

5. Na osnovu podataka datih u tabeli:

Godina	1992.	1993.	1994.	1995.	1996.	1997.	1998.
Proizvodnja	**110**	**91**	**96**	**103**	**120**	**160**	**200**

a) odredi linearni trend; **b) predvidite trend za 2005. godinu;**
v) odredi standardnu grešku trenda.

Rešenje:

Godina	y	x	X^2	xy	yt	y-yt	$(y-yt)^2$
1992	110	-3	9	-330	79,42	30,58	935,136
1993	91	-2	4	-182	94,85	-3,85	14,82
1994	96	-1	1	-96	110,28	-14,28	203,91
1995	103	0	0	-	125,71	-22,71	515,74
1996	120	1	1	120	141,14	-21,14	446,8996
1997	160	2	4	320	156,57	3,43	11,76
1998	200	3	9	600	172	28	784
Σ	880	-	28	432	879,97	-	2912,286

a) $yt=bo+b_1x=125{,}71+15{,}43x \quad bo=\frac{\sum y}{N}=\frac{880}{7}=125{,}71$

$$b_1=\frac{\sum xy}{\sum x^2}=\frac{432}{28}=15{,}43$$

b) $yt_{2005}=125{,}71+15{,}43*10=125{,}71+154{,}3=280{,}01$

v) $S_y=\sqrt{\frac{\sum(y-yt)^2}{N}}=\sqrt{\frac{2912{,}286}{7}}=\sqrt{416{,}04}=20{,}397$

6. Kretanje proizvodnje gvožđa u jednom regionu dato je u tabeli.

Godina	1990	1991	1992	1993	1994
Proizvodnja gvožđa	**10**	**12**	**15**	**17**	**20**

a) Odredi linearni trend. **b) Predvidi proizvodnju za 1998. godinu.**
v) Odredi standardnu grešku trenda.

Rešenje:

Godina	Proizvodnja gvožđa	x	xy	X^2	yt	y-yt	$(y\text{-}yt)^2$
1990	10	-2	-20	4	9,8	0,2	0,04
1991	12	-1	-12	1	12,3	-0,3	0,09
1992	15	0	0	0	14,8	0,2	0,04
1993	17	1	17	1	17,3	-0,3	0,09
1994	20	2	40	4	19,8	0,2	0,04
Σ	74	-	25	10	74	-	0,3

a) $yt = bo + b_1 x = 14{,}8 + 2{,}5x \quad bo = \frac{\sum y}{N} = \frac{74}{5} = 14{,}8$

$b_1 = \frac{\sum xy}{\sum x^2} = \frac{25}{10} = 2{,}5$

b) $yt = 14{,}8 + 2{,}5 * 6 = 14{,}8 + 15 = 29{,}8$

v) $S_y = \sqrt{\frac{\sum (y-yt)^2}{N}} = \sqrt{\frac{0{,}3}{5}} = \sqrt{0{,}06} = 0{,}245$

7. Na osnovu podataka u tabeli:

Godine	**1987**	**1988**	**1989**	**1900**	**1991**	**1992**	**1993**
Prihodi u milionima	**19**	**20**	**23**	**27**	**30**	**32**	**33**

Izračunaj:

a) linearni trend; (4) **b) standardnu grešku trenda;**

v) predvidi tendenciju pojave za 1997. godinu

Rešenje:

Godine	Prihodi (Y)	X	xy	x^2	yt	y-yt	$(y\text{-}yt)^2$
1987	19	-3	-57	9	18,47	0,53	0,28
1988	20	-2	-40	4	21,08	-1,08	1,17
1989	23	-1	-23	1	23,69	-0,69	0,48
1990	27	0	0	0	26,3	0,7	0,49
1991	30	1	30	1	28,91	1,09	1,19
1992	32	2	64	4	31,52	0,48	0,23
1993	33	3	99	9	34,13	-1,13	1,28
Σ	184	-	73	28	184,1	-	5,12

a) yt=bo+b_1x=26,3+2,61x $bo=\frac{\sum y}{N}=\frac{184}{7}=26,3$

$$b_1=\frac{\sum xy}{\sum x^2}=\frac{73}{28}=2,61$$

b) $S_y=\sqrt{\frac{\sum(y-yt)^2}{N}}=\sqrt{\frac{5,12}{7}}=\sqrt{0,7314}=0,86$

v) yt=26,3+2,61*7=26,3+18,27=44,57

8. Na osnovu podataka datih u tabeli:

Godina	1994.	1995.	1996.	1997.	1998.	1999.	2000.	2001.
Proizvodnja	45	81	100	166	218	217	336	432

a) linearni trend; **b) predvidite trend za 2008. godinu;**
b) godišnji tempo rasta.

Rešenje:

Godine	Proizvodnja (y)	x	X2	xy
1994	45	-3,5	12,25	-157,5
1995	81	-2,5	6,25	-202,5
1996	100	-1,5	2,25	-150
1997	166	-0,5	0,25	-83
1998	218	0,5	0,25	109
1999	217	1,5	2,25	325,5
2000	336	2,5	6,25	840
2001	432	3,5	12,25	1512
Σ	1595	-	42	2193,5

a) yt=bo+b1x=199,39+52,23x $bo=\frac{\sum y}{n}=\frac{1595}{8}=199,38$

$$b1=\frac{\sum xy}{\sum x^2}=\frac{2193,5}{42}=52,23$$

b) Yt2008=199,38+52,23*10,5=747,795

c) $Rs=(\sqrt[7]{\frac{432}{45}}-1)*100\%=(\sqrt[7]{9,6}-1)*100\%=\left(\frac{1}{7}log9,6-1\right)*100\%$

$Rs=(\frac{0,98227}{7}$-1)*100%=(0,1432-1)*100%=(1,3814-1)*100%=38,14%

9. Izračunajte linearni trend kretanja proizvodnje šećera i predvidi trend za 2015. god.

Godina	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	∑
Proizvodnja šećera	10	12	15	9	13	18	20	15	12	124

Rešenje:

Godine	Proizvodnja šećera	x	x^2	x*y	yt
2001	10	-4	16	-40	11,38
2002	12	-3	9	-36	11,98
2003	15	-2	4	-30	12,58
2004	9	-1	1	-9	13,18
2005	13	0	0	0	13,78
2006	18	1	1	18	14,38
2007	20	2	4	40	14,98
2008	15	3	9	45	15,58
2009	12	4	16	48	16,18
∑	124	0	60	36	124,02

$$Yt = bo + b_1 x \quad bo = \frac{\sum y}{n} = \frac{124}{9} = 13{,}78 \quad b_1 = \frac{\sum xy}{\sum x2} = \frac{36}{60} = 0{,}6$$

$$Yt = 13{,}78 + 0{,}6x \qquad Yt_{2015} = 13{,}78 + 0{,}6 * 10 = 19{,}78$$

10. Izračunajte linearni trend kretanja proizvodnje grožđa i predvidi trend za 2015. god.

Godina	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	∑
Proizvodnja grožđa	11	13	10	9	12	15	16	13	11	110

Rešenje:

Godine	Proizvodnja šećera	x	x2	x*y	yt
2005	11	-4	16	-44	11,02
2006	13	-3	9	-39	11,32
2007	10	-2	4	-20	11,62
2008	9	-1	1	-9	11,92
2009	12	0	0	0	12,22
2010	15	1	1	15	12,52
2011	16	2	4	32	12,82
2012	13	3	9	39	13,12
2013	11	4	16	44	13,42
$\sum$	110	0	60	18	109,98

$$Yt=bo+b_1x \quad bo=\frac{\sum y}{n}=\frac{110}{9}=12{,}22 \quad b_1=\frac{\sum xy}{\sum x^2}=\frac{18}{60}=0{,}3$$

$$yt=12{,}22+0{,}3x \quad Yt_{2015}=12{,}22+0{,}3*6=14{,}02$$

11. Prihod u 000 dinara jedne fabrike od 1985 – 1991. godine je:

Godine	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991
Prihod u 000 dinara (u)	10	15	16	19	20	23	27

a) odredite linearni trend, izračunaj geometrijsku stopu rasta.
b) na osnovu linearnog trenda predvidi prihod za 1998. godinu.
v) odredite standardnu grešku trenda.
g) izračunajte geometrijsku stopu rasta.

Rešenje:

g)
$$Rs=\left(\sqrt[n-1]{\frac{yn}{y1}}-1\right)*100\%=\left(\sqrt[6]{\frac{27}{10}}-1\right)*100\%=\left(^{\frac{\log 2{,}7}{6}}-1\right)*100\%$$

$$\left(^{\frac{0{,}4314}{6}}-1\right)*100\%=\left(^{0{,}0719}-1\right)*100\%=(1{,}18005-1)*100\%=18{,}1$$

Godine	Proizvodnja	x	X^2	xy	y_T	$y-y_T$	$(y-y_T)^2$
1985	10	-3	9	-30	10,95	-0,95	0,9025
1986	15	-2	4	-30	13,49	1,51	2,2801
1987	16	-1	1	-16	16,03	-0,03	0,0009
1988	19	0	0	0	18,57	0,43	0,1849
1989	20	1	1	20	21,11	1,11	1,2321
1990	23	2	4	46	23,65	0,65	0,4225
1991	27	3	9	81	26,19	0,81	0,6561
$\sum$	130	-	28	71	129,99	-	5,6791

a) yt=bo+b1x=18,57+2,54x $bo=\frac{\sum y}{N}=\frac{130}{7}=18,57$ $b_1=\frac{\sum xy}{\sum x^2}=\frac{71}{28}=2,54$

b) yt=18,57+2,54*10=43,97

v) $S_y=\sqrt{\frac{\sum(y-yt)^2}{N}}=\sqrt{\frac{5,6791}{7}}=\sqrt{0,8113}=0,901$

12. Na osnovu podataka o potrošnji brašna odredite:

a) linearni trend i standardnu grešku trenda

b) geometrijsku stopu rasta

v) predvidi trend kretanja proizvodnje za 2013. godinu.

Godine	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Potrošnja brašna	39	31	43	35	32	39	38	40	42

Rešenje:

Godine	Proizvodnja	x	x^2	xy	yt	y-yt	$(y-yt)^2$
2001	39	-4	16	-156	35,47	3,53	12,46
2002	31	-3	9	-93	36,02	-5,02	25,20
2003	43	-2	4	-86	36,57	6,43	41,34
2004	35	-1	1	-35	37,12	-2,12	4,49
2005	32	0	0	0	37,67	-5,67	32,15
2006	39	1	1	39	38,22	0,78	0,61
2007	38	2	4	76	38,77	-0,77	0,59
2008	40	3	9	120	39,32	0,68	0,46
2009	42	4	16	168	39,87	2,13	4,54
$\sum$	339	0	60	33	339,03	-0,03	121,8501

a) $bo=\frac{339}{9}=37,67$ $b1=\frac{33}{60}=0,55$ $yt=bo+b1x=37,67+0,55x$

$$Sy=\sqrt{\frac{121,8501}{9}}=\sqrt{13,54}=3,68$$

b) $Rs=(\sqrt[8]{\frac{42}{39}}-1)*100=(\frac{\log 1,0769}{8}-1)*100=(\frac{0,03218}{8}-1)*100$

Rs= (antilog0,004023-1)*100=(1,0093-1)*100=0,0093*100=0,93%

v) yt2013=37,67+0,55*8=37,67+4,4=42,07

13. Na osnovu podataka datih u tabeli odredi:.

a) Linearni trend i standardnu grešku trenda

b) Predvidi trend kretanja za 2011. godinu.

v) Odredi geometrijsku stopu rasta.

Godine	**2000**	**2001**	**2002**	**2003**	**2004**	**2005**	**2006**	**2007**
Proizvodnja pšenice	**24**	**31**	**19**	**17**	**37**	**33**	**40**	**39**

Rešenje:

Godine	Proizvodnja	x	x2	xy	yt	y-yt	$(y-yt)^2$
2000	24	-3.5	12.25	-84	21.18	2.82	7.95
2001	31	-2.5	6.25	-77.5	23.7	7.3	53.29
2002	19	-1.5	2.25	-28.5	26.22	-7.22	52.13
2003	17	-0.5	0.25	-8.5	28.74	-11.74	137.83
2004	37	0.5	0.25	18.5	31.26	5.74	32.95
2005	33	1.5	2.25	49.5	33.78	-0.78	0.61
2006	40	2.5	6.25	100	36.3	3.7	13.69
2007	39	3.5	12.25	136.5	38.82	0.18	0.03
$\sum x$	240	0	42	106	240		298.48

a) $bo=\frac{240}{8}=30$ $b1=\frac{106}{42}=2,52$ $yt=bo+b1x=30+2.52x$

$$Sy=\sqrt{\frac{298,48}{8}}=\sqrt{37,31}=6,11$$

b) yt2011=30+2,5*7,5=30+18,75=48,75

v) $Rs=(\sqrt[7]{\frac{39}{24}}-1)*100=(\frac{\log 1,625}{7}-1)*100=(\frac{0,210853}{7}-1)*100$

Rs= (antilog0,030122-1)*100=(1,0718-1)*100=0,0718*100=7,18%

14. Na osnovu podataka datih u tabeli odredi:.

a) Linearni trend i standardnu grešku trenda

b) Predvidi trend kretanja za 2017. godinu.

v) Odredi geometrijsku stopu rasta.

Godine	**2003**	**2004**	**2005**	**2006**	**2007**	**2008**	**2009**	**2010**
Proizvodnja pšenice	**41**	**38**	**39**	**25**	**27**	**33**	**36**	**39**

Rešenje:

Godine	Proizv.	x	x^2	yx	yt	y-yt	$(y-yt)^2$
2003	41	-3,5	12,25	-143,5	36,43	4,57	20,88
2004	38	-2,5	6,25	-95	35,95	2,05	4,20
2005	39	-1,5	2,25	-58,5	35,47	3,53	12,46
2006	25	-0,5	0,25	-12,5	34,99	-9,99	99,80
2007	27	0,5	0,25	13,5	34,51	-7,51	56,40
2008	33	1,5	2,25	49,5	34,03	-1,03	1,06
2009	36	2,5	6,25	90	33,55	2,45	6,00
2010	39	3,5	12,25	136,5	33,07	5,93	35,16
$\sum$	278	0	42	-20	278		235,98

a) $bo=\frac{278}{8}=34,75$ $\quad b1=\frac{-20}{42}=-0,48$ $\quad$ Yt=bo+b1x=34,75-0,48x

$$Sy=\sqrt{\frac{235,98}{8}}=\sqrt{29,497}=5,43$$

b) yt2017=34,75-0,48*10,5=34,75-5,04=29,71

v)

$$Rs=(\sqrt[7]{\frac{39}{41}}-1)*100=(\frac{\log 0,9512}{7}-1)*100=(\frac{-0,02173}{7}-1)*100$$

Rs=(antilog -0,003104 -1)*100=(0,9929 – 1)*100=0,0071*100=0,71%

5.2. Sezonska komponenta

1. Pomoću metoda odnosa prema opštem proseku ispitajte da li sezona utiče na kretanje broja turista u Akva parku u Jagodini.

Kvartali	2011	2012	2013	2014
I	12	15	10	13
II	15	16	13	12
III	20	13	16	19
IV	12	10	14	15

Rešenje:

Za izračunavanje sezonskog indeksa najpre odredimo proseke kvartala i opšti kvartalni prosek. Proseke kvartala dobijamo formulom $\bar{y}_i = \frac{\Sigma y_{ij}}{4}$.

$\bar{y}_i$=50/4=12,5 $\bar{y}_i$=56/4=14 $\bar{y}_i$=68/4=17 $\bar{y}_i$=51/4=12,75

Opšti kvartalni prosek:

$$\bar{\bar{y}}_i = \frac{\Sigma \bar{y}_i}{4} = \frac{56{,}25}{4} = 14{,}06$$

Sezonske indekse dobijamo formulom $Is = \frac{\bar{y}}{\bar{\bar{y}}_i} * 100$.

Is=12,5/14,06*100=88,9% Is=14/14,06*100=99,57%

Is=17/14,06*100=120,91% Is=12,75/14,06*100=90,68%

Kvartali	2011	2012	2013	2014	Prosek kvartala $\bar{y}_i = \frac{\Sigma y_{ij}}{4}$	Sezonski indeksi $Is = \frac{\bar{y}}{\bar{\bar{y}}_i} * 100$
I	12	15	10	13	12,5	88,9
II	15	16	13	12	14	99,57
III	20	13	16	19	17	120,91
IV	12	10	14	15	12,75	90,68
Σ	-	-	-	-	56,25	400,07

U prvom kvartalu izražen je negativan uticaj sezone jer je sezonski indeks ispod proseka za 11,1%. U drugom kvartalu uticaj sezone je zanemarljiv jer je sezonski indeks 0,43% ispod proseka. U trećem kvartalu primetan je pozitivan uticaj sezone (sezonski indeks 20,91% iznad proseka), dok je u poslednjem kvartalu prisutan negativan uticaj sezone jer je sezonski indeks 9,321% ispod proseka.

2. Pomoću metoda odnosa prema opštem proseku ispitajte da li proizvodnja šećera (u 000 kg) po kvartalima ima sezonski karakter.

Kvartali	2011	2012	2013	2014
I	23	33	43	53
II	57	90	95	105
III	70	98	100	120
IV	60	70	80	85

Rešenje:

Za izračunavanje sezonskog indeksa najpre odredimo proseke kvartala i opšti kvartalni prosek. Proseke kvartala dobijamo formulom $\bar{y}_i = \frac{\Sigma y_{ij}}{4}$.

$\bar{y}_i$=153/4=38,25 $\bar{y}_i$=347/4=86,75 $\bar{y}_i$=388/4=97 $\bar{y}_i$=295/4=73,75

Opšti kvartalni prosek:

$$\bar{\bar{y}}_i = \frac{\Sigma \bar{y}_i}{4} = \frac{295,75}{4} = 73,94$$

Sezonske indekse dobijamo formulom $Is = \frac{\bar{y}}{\bar{\bar{y}}_i} * 100$.

Is=38,25/73,94*100=51,73% Is=86,75/73,94*100=117,32%

Is=97/73,94*100=131,19% Is=73,75/73,94*100=99,74%

Kvartali	2011	2012	2013	2014	Prosek kvartala $\bar{y}_i = \frac{\Sigma y_{ij}}{4}$	Sezonski indeksi $Is = \frac{\bar{y}}{\bar{\bar{y}}_i} * 100$
I	23	33	43	53	38,25	51,73
II	57	90	95	105	86,75	117,32
III	70	98	100	120	97	131,19
IV	60	70	80	85	73,75	99,74
Σ	-	-	-	-	295,75	399,99

U prvom kvartalu izražen je negativan uticaj sezone jer je sezonski indeks ispod proseka za 48,27%. U drugom kvartalu primetan je pozitivan uticaj sezone jer je sezonski indeks 17,32% iznad proseka. U trećem kvartalu primetan je pozitivan uticaj sezone (sezonski indeks 31,19% iznad proseka), dok je u poslednjem kvartalu prisutan neznatan uticaj sezone jer je sezonski indeks 0,26% ispod proseka.

3. Pomoću metoda odnosa prema opštem proseku ispitajte da li proizvodnja piva (u 000 hektolitara) po kvartalima ima sezonski karakter.

Kvartali	**2011**	**2012**	**2013**	**2014**
I	**30**	**43**	**55**	**61**
II	**47**	**70**	**89**	**130**
III	**69**	**21**	**39**	**59**
IV	**80**	**93**	**105**	**130**

Rešenje:

Za izračunavanje sezonskog indeksa najpre odredimo proseke kvartala i opšti kvartalni prosek. Proseke kvartala dobijamo formulom $\bar{y}_i = \frac{\Sigma y_{ij}}{4}$.

$\bar{y}_i$=189/4=47,25 $\bar{y}_i$=336/4=84 $\bar{y}_i$=188/4=47 $\bar{y}_i$=408/4=102

Opšti kvartalni prosek:

$$\bar{\bar{y}}_i = \frac{\Sigma \bar{y}_i}{4} = \frac{280{,}25}{4} = 70{,}06$$

Sezonske indekse dobijamo formulom $Is = \frac{\bar{y}}{\bar{\bar{y}}_i} * 100$.

Is=47,25/70,06*100=67,44% Is=84/70,06*100=119,9%

Is=47/70,06*100=67,09% Is=102/70,06*100=145,59%

Kvartali	2011	2012	2013	2014	Prosek kvartala $\bar{y}_i = \frac{\Sigma y_{ij}}{4}$	Sezonski indeksi $Is = \frac{\bar{y}}{\bar{\bar{y}}_i} * 100$
I	30	43	55	61	47,25	67,44
II	47	70	89	130	84	119,9
III	69	21	39	59	47	67,09
IV	80	93	105	130	102	145,59
Σ	-	-	-	-	280,25	400,01

U prvom kvartalu izražen je negativan uticaj sezone jer je sezonski indeks ispod proseka za 32,56%. U drugom kvartalu primetan je pozitivan uticaj sezone jer je sezonski indeks 19,9% iznad proseka. U trećem kvartalu primetan je negativan uticaj sezone (sezonski indeks 32,91% ispod proseka), dok je u poslednjem kvartalu prisutan pozitivan uticaj sezone jer je sezonski indeks 45,59% iznad proseka.

4. Pomoću metoda odnosa prema opštem proseku ispitajte da li proizvodnja soka (u 000 hektolitara) po kvartalima ima sezonski karakter.

Kvartali	2011	2012	2013	2014
I	30	56	73	92
II	47	80	100	123
III	62	83	92	115
IV	120	150	130	170

Rešenje:

Za izračunavanje sezonskog indeksa najpre odredimo proseke kvartala i opšti kvartalni prosek. Proseke kvartala dobijamo formulom $\bar{y}_i = \frac{\Sigma y_{ij}}{4}$.

$\bar{y}_i$=251/4=62,75 $\bar{y}_i$=350/4=87,5 $\bar{y}_i$=352/4=88 $\bar{y}_i$=570/4=142,5

Opšti kvartalni prosek:

$$\bar{\bar{y}}_i = \frac{\Sigma \bar{y}_i}{4} = \frac{380{,}75}{4} = 95{,}19$$

Sezonske indekse dobijamo formulom $Is = \frac{\bar{y}}{\bar{\bar{y}}_i} * 100$.

Is=62,75/95,19*100=65,92% Is=87,5/95,19*100=91,92%

Is=88/95,19*100=92,45% Is=142,5/95,19*100=149,7%

Kvartali	2011	2012	2013	2014	Prosek kvartala $\bar{y}_i = \frac{\Sigma y_{ij}}{4}$	Sezonski indeksi $Is = \frac{\bar{y}}{\bar{\bar{y}}_i} * 100$
I	30	56	73	92	62,75	65,92
II	47	80	100	123	87,5	91,92
III	62	83	92	115	88	92,45
IV	120	150	130	170	142,5	149,70
Σ	-	-	-	-	380,75	399,99

U prvom kvartalu izražen je negativan uticaj sezone jer je sezonski indeks ispod proseka za 34,08%. U drugom kvartalu primetan je negativan uticaj sezone jer je sezonski indeks 8,08% ispod proseka. U trećem kvartalu primetan je negativan uticaj sezone (sezonski indeks 7,55% ispod proseka), dok je u poslednjem kvartalu prisutan pozitivan uticaj sezone jer je sezonski indeks 49,70% iznad proseka.

5. Pomoću metoda odnosa prema opštem proseku ispitajte da li sezona utiče na kretanje broja turista u hotelima na Grčkom primorju.

Kvartali	**2011**	**2012**	**2013**	**2014**
I	**20**	**25**	**30**	**40**
II	**37**	**40**	**49**	**80**
III	**68**	**73**	**95**	**120**
IV	**57**	**70**	**74**	**89**

Rešenje:

Za izračunavanje sezonskog indeksa najpre odredimo proseke kvartala i opšti kvartalni prosek. Proseke kvartala dobijamo formulom $\bar{y}_i = \frac{\Sigma y_{ij}}{4}$.

$\bar{y}_i$=115/4=28,75 $\bar{y}_i$=206/4=51,5 $\bar{y}_i$=356/4=89 $\bar{y}_i$=290/4=72,5

Opšti kvartalni prosek:

$$\bar{\bar{y}}_i = \frac{\Sigma \bar{y}_i}{4} = \frac{241{,}75}{4} = 60{,}44$$

Sezonske indekse dobijamo formulom $Is = \frac{\bar{y}}{\bar{\bar{y}}_i} * 100$.

Is=28,75/60,44*100=47,57% Is=51,5/60,44*100=85,21%

Is=89/60,44*100=147,25% Is=72,5/60,44*100=119,95%

Kvartali	2011	2012	2013	2014	Prosek kvartala $\bar{y}_i = \frac{\Sigma y_{ij}}{4}$	Sezonski indeksi $Is = \frac{\bar{y}}{\bar{\bar{y}}_i} * 100$
I	30	56	73	92	28,75	47,57
II	47	80	100	123	51,5	85,21
III	62	83	92	115	89	147,25
IV	120	150	130	170	72,5	119,95
Σ	-	-	-	-	241,75	399,98

U prvom kvartalu izražen je negativan uticaj sezone jer je sezonski indeks ispod proseka za 52,43%. U drugom kvartalu primetan je negativan uticaj sezone jer je sezonski indeks 14,79% ispod proseka. U trećem kvartalu primetan je pozitivan uticaj sezone (sezonski indeks 47,25% iznad proseka), dok je u poslednjem kvartalu prisutan pozitivan uticaj sezone jer je sezonski indeks 19,95% iznad proseka.

6. Pomoću metoda odnosa prema pokretnim prosecima ispitajte da li sezona utiče na kretanje prodaje piva u hotelima na Grčkom primorju. Isključite uticaj sezone iz o nog kvartala u kome je najizraženiji.

Kvartal	2011	2012	2013	2014
I	**15**	**15**	**25**	**30**
II	**80**	**100**	**105**	**130**
III	**50**	**45**	**60**	**80**
IV	**35**	**40**	**55**	**60**

Rešenje:

Najpre računamo pokretne proseke $\bar{y}$:

(15+80+50+35)/4=45
(80+50+35+15)/4=45
(50+35+15+100)/4=50
(35+15+100+45)/4=48,75
(15+100+45+40)/4=50
(100+45+40+25)/4=52,5
(45+40+25+105)/4=53,75
(40+25+105+60)/4=57,5
(25+105+60+55)/4=61,25
(105+60+55+30)/4=62,5
(60+55+30+130)/4=68,75
(55+30+130+80)/4=73,75
(30+130+80+60)/4=75

Centrirane pokretne proseke ($\bar{y}$c) dobijamo na osnovu pokretnih proseka:

(45+45)/2=45
(45+50)/2=47,5
(50+48,75)/2=49,4
(48,75+50)/2=49,4
(50+52,5)/2=51,3
(52,5+53,75)/2=53,1
(53,75+57,5)/2=55,6
(57,5+61,25)/2=59,4
(61,25+62,5)/2=61,9

(62,5+68,75)/2=65,6
(68,75+73,75)/2=71,3
(73,75+75)/2=74,4

Godine	Kvartali	Originalni podaci (y)	Pokretni proseci $\bar{y}$	Centrirani pokretni proseci $\bar{y}_c$	Sezonski koeficijenti $y/\bar{y}_c$
2011	I	15	-	-	-
	II	80	45	-	-
	III	50	45	45	1,11
	IV	35	50	47,5	0,74
	I	15	48,75	49,4	0,30
2012	II	100	50	49,4	2,02
	III	45	52,5	51,3	0,88
	IV	40	53,75	53,1	0,75
	I	25	57,5	55,6	0,44
	II	105	61,25	59,4	1,77
2013	III	60	62,5	61,9	0,97
	IV	55		65,6	0,84
	I	30	68,75	71,3	0,42
	II	130	73,75	74,4	1,75
2014	III	80	75	-	-
	IV	60	-	-	-

Nakon primene metoda pokretnih proseka dobijamo novu tabelu:

Kvartal	2011	2012	2013	2014	Kvartalne sredine $\bar{y}_i$	Is (sezonski indeksi)
I	-	0,30	0,44	0,42	0,39	39%
II	-	2,02	1,77	1,75	1,85	185%
III	1,11	0,88	0,97	-	0,99	99%
IV	0,74	0,75	0,84	-	0,78	78%

$\bar{y}_i$=1,16/3=0,39 $\bar{y}_i$=5,54/3=1,85 $\bar{y}_i$=2,96/3=0,99 $\bar{y}_i$=2,33/3=0,78

Najjači uticaj sezone je primećen u II kvartalu i u njemu vršimo desezoniranje.

Godine	y_{II}	Is drugog kvartala	y_{II}/Is drugog kvartala
2011	80	185%	43,24
2012	100	185%	54,05
2013	105	185%	56,76
2014	130	185%	70,27

U poslednjoj koloni tabele vidimo koliko bi iznosila prodaja piva u II kvartalu da nije bilo sezonskog uticaja.

7. Pomoću metoda odnosa prema pokretnim prosecima ispitajte da li sezona utiče na kretanje prodaje sladoleda u hotelima na Crnogorskom primorju. Isključite uticaj sezone iz onog kvartala u kome je naj izraženiji.

Kvartal	**2011**	**2012**	**2013**	**2014**
I	**20**	**30**	**45**	**51**
II	**135**	**140**	**159**	**173**
III	**60**	**79**	**89**	**93**
IV	**100**	**120**	**130**	**140**

Rešenje:

Godine	Kvartali	Originalni podaci (y)	Pokretni proseci $\bar{y}$	Centrirani pokretni proseci $\bar{y}_c$	Sezonski koeficijenti $y/\bar{y}_c$
2011	I II III IV	20 135 60 100	- 78,75 81,25 82,5	- - 80 81,88	- - 0,75 1,22
2012	I II III IV	30 140 79 120	87,25 92,25 96 100,75	84,88 89,75 94,13 98,38	0,35 1,56 0,84 1,22
2013	I II III IV	45 159 89 130	103,25 105,75 107,25	102 104,5 106,5 109	0,44 1,52 0,84 1,19
2014	I II III IV	51 173 93 140	110,75 111,75 114,25 -	111,25 113 - -	0,46 1,53 - -

Nakon primene metoda pokretnih proseka dobijamo novu tabelu:

Kvartal	2011	2012	2013	2014	Kvartalne sredine $\overline{y}_i$	Is (sezonski indeksi)
I	-	0,35	0,44	0,46	0,42	42%
II	-	1,56	1,52	1,53	1,54	154%
III	0,75	0,84	0,84	-	0,81	81%
IV	1,22	1,22	1,19	-	1,21	121%

Najjači uticaj sezone je primećen u II kvartalu i u njemu vršimo desezoniranje.

Godine	y_{II}	Is drugog kvartala	y_{II}/Is drugog kvartala
2011	135	154%	87,66
2012	140	154%	90,91
2013	159	154%	103,25
2014	173	154%	112,34

U poslednjoj koloni tabele vidimo koliko bi iznosila prodaja sladoleda u II kvartalu da nije bilo sezonskog uticaja.

8. Pomoću metoda odnosa prema pokretnim prosecima ispitajte da li sezona utiče na kretanje proizvodnje uglja u Srbiji. Isključite uticaj sezone iz onog kvartala u kome je naj izraženiji.

Kvartal	2011	2012	2013	2014
I	**30**	**43**	**70**	**75**
II	**45**	**60**	**79**	**93**
III	**60**	**80**	**108**	**120**
IV	**92**	**112**	**130**	**150**

Rešenje:

Godine	Kvartali	Originalni podaci (y)	Pokretni proseci $\bar{y}$	Centrirani pokretni proseci $\bar{y}_c$	Sezonski koeficijenti $y/\bar{y}_c$
2011	I	30		-	-
			-		
	II	45		-	-
			56,75		
	III	60		58,38	1,03
			60		
	IV	92		61,88	1,49
			63,75		
	I	43		66,25	0,65
			68,75		
2012	II	60		71,25	0,84
			73,75		
	III	80		77,13	1,04
			80,5		
	IV	112		82,88	1,35
			85,25		
	I	70		81,25	0,86
			77,25		
	II	79		87	0,91
			96,75		
2013	III	108		97,38	1,11
			98		
	IV	130		99,75	1,30
			101,5		
	I	75		103	0,73
			104,5		
	II	93		107	0,87
			109,5		
2014	III	120		-	-
			-		
	IV	150		-	-

Nakon primene metoda pokretnih proseka dobijamo novu tabelu:

Kvartal	2011	2012	2013	2014	Kvartalne sredine $\bar{y}_i$	Is (sezonski indeksi)
I	-	0,65	0,86	0,73	0,75	75%
II	-	0,84	0,91	0,87,	0,87	87%
III	1,03	1,04	1,11	-	1,06	106%
IV	1,49	1,35	1,30	-	1,38	138%

Najjači uticaj sezone je primećen u IV kvartalu i u njemu vršimo desezoniranje.

Godine	y_{IV}	Is četvrtog kvartala	y_{II}/Is četvrtog kvartala
2011	92	138%	66,67
2012	112	138%	81,16
2013	130	138%	94,20
2014	150	138%	108,70

U poslednjoj koloni tabele vidimo koliko bi iznosila proizvodnja uglja u IV kvartalu da nije bilo sezonskog uticaja.

9. Pomoću metoda odnosa prema pokretnim prosecima ispitajte da li sezona utiče na kretanje proizvodnje soka u Srbiji. Isključite uticaj sezone iz onog kvartala u kome je naj izraženiji.

Kvartal	**2011**	**2012**	**2013**	**2014**
I	**40**	**70**	**81**	**89**
II	**67**	**85**	**99**	**120**
III	**83**	**90**	**120**	**130**
IV	**102**	**120**	**130**	**140**

Rešenje:

Godine	Kvartali	Originalni podaci (y)	Pokretni proseci $\bar{y}$	Centrirani pokretni proseci $\bar{y}_c$	Sezonski koeficijenti $y/\bar{y}_c$
2011	I II III IV	40 67 83 102	- 73 80,5 85	- - 76,75 82,75	- - 1,08 1,23
2012	I II III IV	70 85 90 120	86,75 91,25 94 97,5	85,88 89 92,63 95,75	0,82 0,96 0,97 1,25
2013	I II III IV	81 99 120 130	105 107,5 109,5	101,25 106,25 108,5 112,13	0,8 0,93 1,11 1,16
2014	I II III IV	89 120 130 140	114,75 117,25 119,75 -	116 118,5 - -	0,77 1,01 - -

Nakon primene metoda pokretnih proseka dobijamo novu tabelu:

Kvartal	2011	2012	2013	2014	Kvartalne sredine $\bar{y}_i$	Is (sezonski indeksi)
I	-	0,82	0,8	0,77	0,81	80%
II	-	0,96	0,93	1,01	0,97	97%
III	1,08	0,97	1,11	-	1,05	105%
IV	1,23	1,25	1,16	-	1,21	121%

Najjači uticaj sezone je primećen u IV kvartalu i u njemu vršimo desezoniranje.

Godine	y_{IV}	Is četvrtog kvartala	y_{II}/Is četvrtog kvartala
2011	102	121%	84,3
2012	120	121%	99,17
2013	130	121%	107,35
2014	140	121%	115,70

U poslednjoj koloni tabele vidimo koliko bi iznosila proizvodnja soka u IV kvartalu da nije bilo sezonskog uticaja.

5.3. Ciklična komponenta

1. U tabeli je data vrednost proizvodnje pšenice po godinama. Sa rizikom greške 0,05 spitajte da li pojavu karakterišu ciklične varijacije.

Godine	**2002**	**2003**	**2004**	**2005**	**2006**	**2007**	**2008**	**2009**	**2010**	**2011**	**2012**	**2013**	**2014**
Proiz. Pšenice (Y)	**5**	**7**	**11**	**12**	**15**	**19**	**21**	**22**	**25**	**30**	**31**	**34**	**37**

Rešenje:

Najpre je neophodno odrediti linearni trend. Kada odredimo liniju trenda pristupamo isključivanju trend komponente iz originalnih podataka pomoću formule (y/yt)*100. U poslednjoj koloni beležimo da li je bilo rasta (+) ili pada (-) u odnosu na prosek (100%).

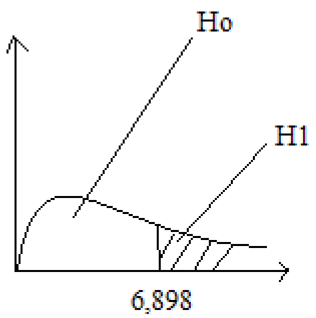
Godine	Proizvodnja pšenice (Y)	x	x^2	x*y	yt	(y/yt)*100	Odstupanje od proseka (100%)
2002	5	-6	36	-30	4,73	105,71	+
2003	7	-5	25	-35	7,39	94,72	-
2004	11	-4	16	-44	10,05	109,45	+
2005	12	-3	9	-36	12,71	94,41	-
2006	15	-2	4	-30	15,37	97,59	-
2007	19	-1	1	-19	18,03	105,38	+
2008	21	0	0	0	20,69	101,5	+
2009	22	1	1	22	23,35	94,22	-
2010	25	2	4	50	26,01	96,12	-
2011	30	3	9	90	28,67	104,64	+
2012	31	4	16	124	31,33	98,95	-
2013	34	5	25	170	33,99	100,03	+
2014	37	6	36	222	36,65	100,95	+
Σ	269	-	182	484	268,97	-	/

$$bo=\frac{269}{13}=20,69 \qquad b1=\frac{484}{182}=2,66 \qquad yt= bo+ b1x=20,69+2,66x$$

$$f'_1 = \frac{5(n-3)}{12} = \frac{5(13-3)}{12} = \frac{50}{12} = 4{,}17 \qquad f'_2 = \frac{11(n-4)}{60} = \frac{11(13-4)}{60} = \frac{99}{60} = 1{,}65$$

$$f'_3 = \frac{4n-21}{60} = \frac{4*13-21}{60} = \frac{52-21}{60} = \frac{31}{60} = 0{,}52$$

1. Ho: Pojavu ne karakterišu ciklične varijacije
   H1: Pojavu karakterišu ciklične varijacije
2. Prema kriterijumu n>12 posmatrana pojava ispunjava uslov za testiranje i vrednost statistike testa iznosi $\chi^2_{0,05}=6{,}898$



Ho se prihvata za $\chi^2 p < 6{,}898$
H1 se prihvata za $\chi^2 p \geq 6{,}898$

$$\chi^2 p = \sum \frac{(fi - fi')^2}{fi'}$$

3.

4.

Trajanje faza u godinama	F	F’	f-f’	$(f-f')^2$	$(f-f')^2 / f'$
1	5	4,17	0,83	0,69	0,17
2	4	1,65	2,35	5,52	3,35
3 i više	0	0,52	0,52	0,27	0,52
Σ	-	-	-	-	4,04

5. $\chi^2_p=4{,}04<6{,}898$ Ho se prihvata, posmatranu pojavu ne karakterišu ciklične varijacije.

2. U tabeli je data vrednost proizvodnje kukuruza po godinama. Sa rizikom greške 0,05 spitajte da li pojavu karakterišu ciklične varijacije.

God.	**2002**	**2003**	**’04**	**’05**	**’06**	**’07**	**’08**	**’09**	**’10**	**’11**
Pro. Kukuru-za (Y)	**9**	**11**	**12**	**15**	**17**	**21**	**20**	**18**	**22**	**25**

God.	**’12**	**’13**	**’14**	**’15**
Pro. Kukuru-za (Y)	**29**	**30**	**32**	**35**

Rešenje:

Najpre je neophodno odrediti linearni trend. Kada odredimo liniju trenda pristupamo isključivanju trend komponente iz originalnih podataka pomoću formule (y/yt)*100. U poslednjoj koloni beležimo da li je bilo rasta (+) ili pada (-) u odnosu na prosek (100%).

Godine	Proizvodnja pšenice (Y)	x	x^2	x*y	yt	(y/yt)*100	Odstupanje od proseka (100%)
2001	9	-6,5	42,25	-58,5	8,73	103,09	+
2002	11	-5,5	30,25	-60,5	10,64	103,38	+
2003	12	-4,5	20,25	-54	12,55	95,62	-
2004	15	-3,5	12,25	-52,5	14,46	103,73	+
2005	17	-2,5	6,25	-42,5	16,37	103,85	+
2006	21	-1,5	2,25	-31,5	18,28	114,88	+
2007	20	-0,5	0,25	-10	20,19	99,06	-
2008	18	0,5	0,25	9	22,1	81,45	-
2009	22	1,5	2,25	33	24,01	91,63	-
2010	25	2,5	6,25	62,5	25,92	96,45	-
2011	29	3,5	12,25	101,5	27,83	104,20	+
2012	30	4,5	20,25	135	29,74	100,87	+
2013	32	5,5	30,25	176	31,65	101,11	+
2014	35	6,5	42,25	227,5	33,56	104,29	+
Σ	296	-	227,5	435	296,03	-	/

$$bo=\frac{296}{14}=21{,}14 \qquad b1=\frac{435}{227{,}5}=1{,}91$$

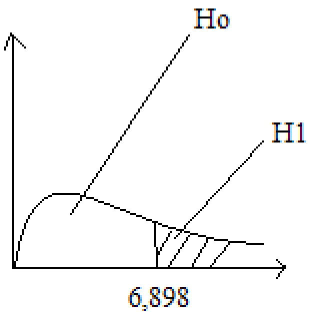
yt=bo+b1x=21,14+1,91x

$$f'_1=\frac{5(n-3)}{12}=\frac{5(14-3)}{12}=\frac{55}{12}=4{,}58 \qquad f'_2=\frac{11(n-4)}{60}=\frac{11(14-4)}{60}=\frac{110}{60}=1{,}83$$

$$f'_3=\frac{4n-21}{60}=\frac{4*14-21}{60}=\frac{56-21}{60}=\frac{35}{60}=0{,}58$$

1. Ho: Pojavu ne karakterišu ciklične varijacije
   H1: Pojavu karakterišu ciklične varijacije
2. Prema kriterijumu n>12 posmatrana pojava ispunjava uslov za testiranje i vrednost statistike testa iznosi $\chi^2_{0,05}$=6,898

3.



Ho se prihvata za $\chi^2 p < 6{,}898$
H1 se prihvata za $\chi^2 p \geq 6{,}898$

$$\chi^2 p = \sum \frac{(fi - fi')^2}{fi'}$$

4.

Trajanje faza u godinama	F	F’	f-f’	$(f-f')^2$	$(f-f')^2 / f'$
1	1	4,58	-3,58	12,82	2,80
2	1	1,83	0,83	0,69	0,38
3 i više	3	0,58	2,42	5,86	10,10
Σ	-	-	-	-	13,28

5. χ^2_p=13,28>6,898 H1 se prihvata, posmatranu pojavu karakterišu ciklične varijacije.

3. U tabeli je data vrednost proizvodnje šećera po godinama. Sa rizikom greške 0,05 spitajte da li pojavu karakterišu ciklične varijacije.

God.	**2002**	**2003**	**’04**	**’05**	**’06**	**’07**	**’08**	**’09**	**’10**	**’11**	**’12**	**’13**	**’14**
Pro. šećera (Y)	**5**	**7**	**11**	**13**	**10**	**15**	**19**	**16**	**23**	**20**	**23**	**27**	**30**

Rešenje:

Najpre je neophodno odrediti linearni trend. Kada odredimo liniju trenda pristupamo isključivanju trend komponente iz originalnih podataka pomoću formule (y/yt)*100. U poslednjoj koloni beležimo da li je bilo rasta (+) ili pada (-) u odnosu na prosek (100%).

Godine	Proizvodnja pšenice (Y)	x	x^2	x*y	yt	(y/yt)*100	Odstupanje od proseka (100%)
2001	5	-6	36	-30	5,45	91,74	-
2002	7	-5	25	-35	7,35	95,24	-
2003	11	-4	16	-44	9,255	118,92	+
2004	13	-3	9	-39	11,15	116,59	+
2005	10	-2	4	-20	13,05	76,63	-
2006	15	-1	1	-15	14,95	100,33	+
2007	19	0	0	0	16,85	112,76	+
2008	16	1	1	16	18,75	85,33	-
2009	23	2	4	46	20,65	111,38	+
2010	20	3	9	60	22,55	88,69	-
2011	23	4	16	92	24,45	94,07	-
2012	27	5	25	135	26,35	102,47	+
2013	30	6	36	180	28,25	106,19	+
Σ	219	-	182	346	219,05	-	/

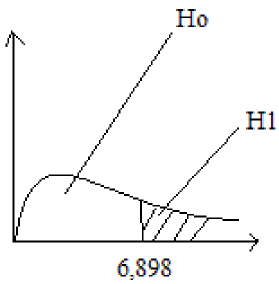
$$bo=\frac{219}{13}=16,85 \qquad b1=\frac{346}{182}=1,90$$

yt=bo+b1x=16,85+1,90x

$$f'_1=\frac{5(n-3)}{12}=\frac{5(13-3)}{12}=\frac{50}{12}=4,17 \qquad f'_2=\frac{11(n-4)}{60}=\frac{11(13-4)}{60}=\frac{99}{60}=1,65$$

$$f'_3=\frac{4n-21}{60}=\frac{4*13-21}{60}=\frac{52-21}{60}=\frac{31}{60}=0,52$$

1. Ho: Pojavu ne karakterišu ciklične varijacije
   H1: Pojavu karakterišu ciklične varijacije
2. Prema kriterijumu n>12 posmatrana pojava ispunjava uslov za testiranje i vrednost statistike testa iznosi $\chi^2_{0,05}=6,898$



Ho se prihvata za $\chi^2 p < 6,898$
H1 se prihvata za $\chi^2 p \geq 6,898$

$$\chi^2 p=\sum\frac{(fi-fi')^2}{fi'}$$

3.

4.

Trajanje faza u godinama	F	F'	f-f'	$(f-f')^2$	$(f-f')^2 / f'$
1	3	4,17	-1,17	1,37	0,33
2	5	1,65	3,35	12,22	7,41
3 i više	0	0,52	0,52	0,27	0,52
Σ	-	-	-	-	8,26

5. χ^2_p=8,26>6,898 H1 se prihvata, posmatranu pojavu karakterišu ciklične varijacije.

4. U tabeli je data vrednost proizvodnje šećera po godinama. Sa rizikom greške 0,05 spitajte da li pojavu karakterišu ciklične varijacije.

God.	2002	2003	'04	'05	'06	'07	'08	'09	'10	'11
Pro. šećera (Y)	8	10	13	17	23	25	29	32	30	36

God.	'12	'13	'14	'15
Pro. šećera (Y)	39	40	33	34

Rešenje:

Najpre je neophodno odrediti linearni trend. Kada odredimo liniju trenda pristupamo isključivanju trend komponente iz originalnih podataka pomoću formule (y/yt)*100. U poslednjoj koloni beležimo da li je bilo rasta (+) ili pada (-) u odnosu na prosek (100%).

$$bo=\frac{369}{14}=26,36 \qquad b1=\frac{535,5}{227,5}=2,35$$

yt=bo+b1x=26,36+2,35x

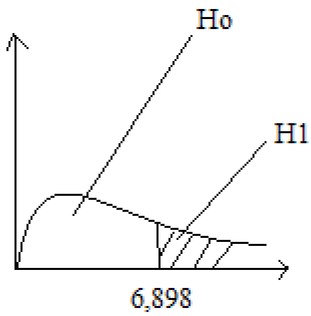
$$f'_1=\frac{5(n-3)}{12}=\frac{5(14-3)}{12}=\frac{55}{12}=4,58 \qquad f'_2=\frac{11(n-4)}{60}=\frac{11(14-4)}{60}=\frac{110}{60}=1,83$$

$$f'_3=\frac{4n-21}{60}=\frac{4*14-21}{60}=\frac{56-21}{60}=\frac{35}{60}=0,58$$

Godine	Proizvodnja pšenice (Y)	x	x^2	x*y	yt	(y/yt)*100	Odstupanje od proseka (100%)
2001	8	-6,5	42,25	-52	11,09	72,14	-
2002	10	-5,5	30,25	-55	13,44	74,40	-
2003	13	-4,5	20,25	-58,5	15,79	82,33	-
2004	17	-3,5	12,25	-59,5	18,14	93,72	-
2005	23	-2,5	6,25	-57,5	20,49	112,25	+
2006	25	-1,5	2,25	-37,5	22,84	109,46	+
2007	29	-0,5	0,25	-14,5	25,19	115,13	+
2008	32	0,5	0,25	16	27,54	116,19	+
2009	30	1,5	2,25	45	29,89	100,37	+
2010	36	2,5	6,25	90	32,34	111,32	+
2011	39	3,5	12,25	136,5	34,59	112,75	+
2012	40	4,5	20,25	180	36,94	108,28	+
2013	33	5,5	30,25	181,5	39,29	83,99	-
2014	34	6,5	42,25	221	41,64	81,65	-
Σ	369	-	227,5	535,5	369,21	-	/

1. Ho: Pojavu ne karakterišu ciklične varijacije
   H1: Pojavu karakterišu ciklične varijacije
2. Prema kriterijumu n>12 posmatrana pojava ispunjava uslov za testiranje i vrednost statistike testa iznosi $\chi^2_{0,05}=6,898$

3.



Ho se prihvata za $\chi^2 p < 6,898$
H1 se prihvata za $\chi^2 p \geq 6,898$

$$\chi^2 p = \sum \frac{(fi - fi')^2}{fi'}$$

4.

Trajanje faza u godinama	F	F'	f-f'	$(f-f')^2$	$(f-f')^2 / f'$
1	0	4,58	-4,58	20,98	4,58
2	1	1,83	0,83	0,69	0,38
3 i više	2	0,58	1,42	2,02	3,48
Σ	-	-	-	-	8,44

5. $\chi^2_p=8,44>6,898$ H1 se prihvata, posmatranu pojavu karakterišu ciklične varijacije.

6. Indeksni brojevi

1. Proizvodnja u preduzeću „R“ po vrstama proizvoda je:

Vrste proizvoda	**Proizvodnja i cena 1995.**		**Proizvodnja i cena 1997.**	
	$q_{0\,(95)}$	$p_{0\,(95)}$	$q_{1\,(97)}$	$p_{1\,(97)}$
A	**2500**	**15**	**4000**	**10**
B	**3100**	**20**	**3000**	**25**
V	**1500**	**25**	**2500**	**20**
G	**2000**	**30**	**1500**	**30**

a) Izračunaj grupni indeks cene po metodu agregata sa ponderom iz baznog perioda.
b) Izračunaj grupni indeks cene po metodu agregata sa ponderom iz tekućeg perioda.

Rešenje:

Kada je potrebno izračunati grupne indekse, a imate sve neophodne parametre poznate onda samo izračunate tražene proizvode u skladu sa odgovarajućim formulama.

Vrsta Proizvoda	Proizvodnja i cena 1995.		Proizvodnja i cena 1997.		piqo	poqo	piqi	poqi
	$q_{0\,(95)}$	$p_{0\,(95)}$	$q_{1\,(97)}$	$p_{1\,(97)}$				
А	2500	15	4000	10	25000	37500	40000	60000
Б	3100	20	3000	25	77500	62000	75000	60000
В	1500	25	2500	20	30000	37500	50000	62500
Г	2000	30	1500	30	60000	60000	45000	45000
					192500	197000	210000	227500

$$oIp = \frac{\sum piqo}{\sum poqo} * 100\% = \frac{192500}{197000} * 100\% = 97{,}72\%$$

$$iIp = \frac{\sum piqi}{\sum poqi} * 100\% = \frac{210000}{227500} * 100\% = 92{,}31\%$$

oIp pokazuje da je došlo do pada cene u tekućoj u odnosu na baznu godinu za 2,28% prema količinama iz baznog perioda.
iIp pokazuje da je došlo do pada cene u tekućoj u odnosu na baznu godinu za 7,69% prema količinama iz tekućeg perioda.

2. Proizvodnja u preduzeću „M“ po vrstama proizvoda je:

Vrste proizvoda	**Cene proizvoda**		**Proizvodnja u kilogramima**	
	p_0 (95)	**p_1 (95)**	**q_0 (97)**	**q_1 (97)**
A	**10**	**15**	**5200**	**4800**
B	**20**	**25**	**3100**	**3700**
V	**25**	**20**	**4100**	**4000**
G	**30**	**30**	**3500**	**3000**

a) Izračunaj grupni indeks količine po metodu agregata sa ponderom iz baznog perioda.
b) Izračunaj grupni indeks količine po metodu agregata sa ponderom iz tekućeg perioda.

Rešenje:

Vrsta Proizvoda	Cene proizvoda		Proizvodnja u kg		qipo	qopo	qipi	qopi
	p_0 (95)	p_1 (95)	q_0 (97)	q_1 (97)				
А	10	15	5200	4800	48000	52000	72000	78000
Б	20	25	3100	3700	74000	62000	92500	77500
В	25	20	4100	4000	100000	102500	80000	82000
Г	30	30	3500	3000	90000	105000	90000	105000
					312000	321500	334500	342500

$$oIq=\frac{\sum qipo}{\sum qopo} * 100\% = \frac{312000}{321500} * 100\% = 97,05\%$$

$$iIq=\frac{\sum qipi}{\sum qopi} * 100\% = \frac{334500}{342500} * 100\% = 97,66\%$$

oIq pokazuje da je došlo do pada količine u tekućoj u odnosu na baznu godinu za 2,95% prema cenama iz baznog perioda.

iIq pokazuje da je došlo do pada količine u tekućoj u odnosu na baznu godinu za 2,34% prema cenama iz tekućeg perioda.

3. Proizvodnja u preduzeću „R“ po vrstama proizvoda je:

Vrste proizvoda	Proizvodnja u kilogramima		Vrednost proizvoda	
	q_0 (90)	q_1 (95)	q_0p_0 (90)	q_1p_1 (95)
H	150	200	2600	4500
U	260	220	2400	3400
Z	140	230	2300	2200
∑	-	-	7300	10100

Izračunaj grupni indeks cene i količine po metodu agregata sa ponderom iz baznog perioda.

Rešenje:

Kada je neophodno izračunati grupne indekse, a nemamo sve parametre posebno date: qo, qi, po, pi, onda moramo prvo pronaći parametre koji su nepoznati, pa tek onda pristupiti izračunavanju proizvoda koji su nam potrebni prema formulama. Poznato je qo i proizvod qopo tako da možemo odatle deljenjem pronaći po. Takođe, poznato je qi i proizvod qipi, tako da odatle možemo deljenjem doći do pi. Kada pronađemo posebno sve parametre: qo, qi, po, pi, onda možemo izračunavati proizvode u skladu sa formulama koje su nam potrebne.

Proizvodi	q_0	qi	qopo	qipi	$p_i=\frac{qipi}{qi}$	$p_o=\frac{qopo}{qo}$	piqo	qipo
X	150	200	2600	4500	22,5	17,33	3375	3466
Y	260	220	2400	3400	15,45	9,23	4017	2030,6
Z	140	230	2300	2200	9,57	16,43	1339,8	3778,9
∑	-	-	7300	10100	-	-	8731,8	9275,5

$$oIp=\frac{\sum piqo}{\sum qopo} * 100\% = \frac{8731,8}{7300} * 100\% = 119,61\%$$

$$oIq=\frac{\sum qipo}{\sum qopo} * 100\% = \frac{9275,5}{7300} * 100\% = 127,061\%$$

oIq pokazuje da je došlo do rasta količine u tekućoj u odnosu na baznu godinu za 27,061% prema cenama iz baznog perioda.
oIp pokazuje da je došlo do rasta cene u tekućoj u odnosu na baznu godinu za 19,61% prema količinama iz baznog perioda.

4. Izračunaj indeks troškova života četvoročlanog domaćinstva za period od 1995 – 2003. godine na osnovu podataka iz tabele:

Vrsta proizvoda	Cena u 1995. godini p_o	Ip u 2003. godini	Prosečna potrošnja q u 2003. godini
Hleb	**14**	**180**	**155**
Meso	**90**	**240**	**70**
Mleko	**14**	**200**	**145**
Odeća	**3000**	**160**	**2**
Obuća	**600**	**130**	**2**
Stanarina	**1110**	**100**	**12**
Električna energija	**0,9**	**180**	**3500**

Rešenje:

Kod indeksa troškova života neophodno je da imate posebno vrednosti za količinu (q) i cene u tekućem periodu (pi) i cene u baznom periodu (po). U ovom zadatku pi nije poznato. Imamo individualni indeks cene na osnovu koga možemo izračunati pi, jer imamo cene iz baznog perioda.

Ip=$\frac{pi}{po} * 100\%$ Odavde je pi=(IP*po)/100. Otvaramo tu kolonu. Nakon toga računamo proizvode koji sun am potrebni da bi izračunali indeks troškova života.

Proizvodnja	Cena u 1995. (Po)	Ip	Prosečna potrošnja (q)	Pi=(po*Ip)/100	piq	poq
Hleb	14	180	155	25,2	3906	2170
Meso	90	240	70	216	15120	6300
Mleko	14	200	145	28	4060	2030
Odeća	3000	160	2	4800	9600	6000
Obuća	600	130	2	780	1560	1200
Stanarina	1110	100	12	1110	13320	13320
El. Energija	0,9	180	3500	1,62	5670	3150
Σ				-	53236	34170

$$Ip=\frac{\sum piq}{\sum poq} * 100\% \quad Ip=\frac{53236}{34170} * 100\% = 155{,}80\%$$

Došlo je do rasta troškova života u tekućoj godini u odnosu na baznu godinu za 55,80%.

5. Proizvodnja u preduzeću „Metal“ po vrstama proizvoda data je u tabeli:

Vrsta proizvoda	**Proizvodnja**		**p_0q_0 ('93)**	**piqi ('94)**
	’93 (q_0)	**’94 (qi)**		
H	**10**	**16**	**3000**	**4000**
Y	**15**	**18**	**2600**	**3800**
Z	**24**	**30**	**2400**	**4000**

Izračunaj grupni indeks cene i količine u tekućem periodu.

Rešenje:

Proizvod	q_0 (93)	qi (94)	poqo (93)	piqi (94)	$Po=\frac{poqo}{qo}$	$Pi=\frac{piqi}{qi}$	qopi	poqi
X	10	16	3000	4000	300	250	2500	4800
Y	15	18	2600	3800	173,33	211	3165	3114
Z	24	30	2400	4000	100	133	3192	3000
Σ	-	-	8000	11800	-	-	8857	10914

$$iIq = \frac{\sum qipi}{\sum qopi} * 100\% = \frac{11800}{8857} * 100\% = 133{,}23\%$$

$$iIp = \frac{\sum piqi}{\sum poqi} * 100\% = \frac{11800}{10914} * 100\% = 108{,}12\%$$

iIq pokazuje da je došlo do rasta količine u tekućoj u odnosu na baznu godinu za 33,23% prema cenama iz tekućeg perioda.
iIp pokazuje da je došlo do rasta cene u tekućoj u odnosu na baznu godinu za 8,12% prema količinama iz tekućeg perioda.

6. Promet aparata za domaćinstvo je:

Vrsta proizvoda	**Količina za 1993. g. (q_0)**	**Vrednost za 1995. g. ($q_i$pi)**	**Ip**	**Iq**
A	**140**	**14 000**	**140**	**105**
B	**220**	**28 000**	**250**	**80**
V	**160**	**18 000**	**190**	**110**

Izračunaj grupni indeks fizičkog obima prometa po metodu agregata sa ponderom iz baznog i tekućeg perioda.

Rešenje:

Vrsta proizvoda	Količina '93. (q_0)	Vrednost 1995. (qipi)	Ip	Iq	$qi=\frac{Iq*q0}{100}$	$pi=\frac{qipi}{qi}$	$po=\frac{pi*100}{Ip}$	qipo	qopo	qopi
A	140	14 000	140	105	147	95,2	68	9 996	9 520	13 328
Б	220	28 000	250	80	176	159,1	63,6	11 193,6	13 992	35 002
B	160	18 000	190	110	176	102,3	53,8	9 468,8	8 608	16 368
Σ	-	60 000	-	-	-	-	-	30 658,4	32 120	64 698

$$oIq=\frac{\sum qipo}{\sum qopo}*100\%=\frac{30\,658{,}4}{32\,120}=95{,}45\%$$

$$iIq=\frac{\sum qipi}{\sum qopi}*100\%=\frac{60\,000}{64\,698}=92{,}74\%$$

oIq pokazuje da je došlo do pada količine u tekućoj u odnosu na baznu godinu za 4,55% prema cenama iz baznog perioda.

iIq pokazuje da je došlo do pada količine u tekućoj u odnosu na baznu godinu za 7,26% prema cenama iz tekućeg perioda.

7. Na osnovu podataka iz tabele izračunajte:

Proizvodi	qi	Poqi	Ip=pi*100/po	Iq=qi*100/qo
A	**453**	**5720**	**143**	**128**
B	**321**	**5300**	**169**	**157**
V	**290**	**4910**	**173**	**171**

a) grupni indeks cene po metodi agregata sa ponderom iz baznog perioda.

b) fišerov idealni indeks količine.

Rešenje:

Pr.	qi	poqi	Ip	Iq	po	pi	qo	piqo	poqo	qipi
A	453	5720	143	128	12,63	18,06	353,91	6391,61	4469,88	8181,18
B	321	5300	169	157	16,51	27,90	204,46	5704,43	3375,63	8955,9
V	290	4910	173	171	16,93	29,29	169,59	4967,29	2871,15	8494,1
Σ	-	15930	-	-	-	-	-	17063,33	10716,66	25631,18

po=poqi/qi pi=Ip*po/100 qo=qi*100/Iq

$$oIp=\frac{17063{,}33}{10716{,}66}=1{,}5923*100\%=159{,}23\%$$

oIp pokazuje da je došlo do rasta cene u tekućoj u odnosu na baznu godinu za 59,23% prema količinama iz baznog perioda.

$$fiq=\sqrt{\frac{25631,18}{17063,33}*\frac{15930}{10716,66}}*100=\sqrt{1,50212*1,486547}*100$$

$$fiq=\sqrt{2,233}*100=1,4943*100=149,43\%$$

Fišerov idealni indeks količine pokazuje da je došlo do rasta količine u tekućem periodu u odnosu na bazni za 49,43%

8. Na osnovu podataka iz tabele izračunajte:

Proizvodi	Po	poqi	Ip=pi*100/po	Iq=qi*100/qo
A	**13**	**2750**	**165**	**110**
B	**17**	**3200**	**120**	**125**
V	**19**	**4120**	**98**	**133**

a) grupni indeks vrednosti. **b) fišerov idealni indeks cene.**

Rešenje:

Pr.	Po	poqi	Ip	Iq	qi	pi	qo	piqo	poqo	qipi
A	13	2750	165	110	211,54	21,45	192,31	4125,05	2500,03	4537,53
B	17	3200	120	125	188,24	20,40	150,59	3072,04	2560,03	3840,09
V	19	4120	98	133	216,84	18,62	163,04	3035,8	3097,76	4037,56
Σ	-	10070	-	-	-	-	-	10232,89	8157,82	12415,18

qi=poqi/po pi=Ip*po/100 qo=qi*100/Iq

$$Ipq=\frac{12415,18}{8157,82}*100=1,5219*100=152,19\%$$

$$fIp=\sqrt{\frac{12415,18}{10070}*\frac{10232,89}{8157,82}}*100=\sqrt{1,23288*1,2543}*100$$

$$fIp=\sqrt{1,5464}*100=1,2435*100=124,35\%$$

Ipq pokazuje da je došlo do rasta vrednosti u tekećem periodu u odnosu na bazni period za 52,19%

Fišerov idealni indeks cene pokazuje da je došlo do rasta cena u tekućem periodu u odnosu na bazni za 24,35%

9. Na osnovu podataka iz tabele izračunajte:

Proizvodi	Qo	piqo	Iq=qi*100/qo	Ip=pi*100/po
A	**321**	**5300**	**157**	**169**
B	**290**	**4910**	**171**	**173**
V	**453**	**5720**	**128**	**143**

a) grupni indeks količine po metodi agregata sa ponderom iz tekućeg perioda.
b) fišerov idealni indeks cene.

Rešenje:

Pr.	qo	piqo	Iq	Ip	pi	Po	qi	qipi	poqi	poqo
A	321	5300	157	169	15,51	9,77	503,97	8321,54	4923,79	3136,17
B	290	4910	171	173	16,93	9,79	495,90	8395,59	4854,86	2839,1
V	453	5720	128	143	12,63	8,83	579,84	7323,38	5119,99	4000
Σ	-	15930	-	-	-	-	-	24040,51	14898,64	9975,27

pi=qopi/qo   po=pi*100/Ip   qi=qo*Iq/100

$$iIq=\frac{\Sigma qipi}{\Sigma qopi}*100\%=\frac{24040{,}51}{15930}*100=1{,}509*100=150{,}9\%$$

$$fIp=\sqrt{\frac{24040{,}51}{14898{,}64}*\frac{15930}{9975{,}27}}*100=\sqrt{1{,}613*1{,}5969}*100$$

$$fIp=\sqrt{2{,}577}*100=1{,}6053*100=160{,}53\%$$

iIq pokazuje da je došlo do rasta količine u tekućoj u odnosu na baznu godinu za 50,9% prema cenama iz tekućeg perioda.
Fišerov idealni indeks cene pokazuje da je došlo do rasta cena u tekućem periodu u odnosu na bazni za 60,53%

10. Proizvodnja u preduzeću „R“ po vrstama proizvoda je:

Vrste proizvoda	Proizvodnja u kilogramima		Vrednost proizvoda	
	q_0 (95)	q_1 (97)	q_0p_0 (95)	q_1p_1 (97)
A	**13**	**15**	**2600**	**3000**
B	**24**	**28**	**2800**	**4500**
V	**12**	**20**	**2500**	**3800**

a) Izračunaj grupni indeks cene po metodu agregata sa ponderom iz baznog perioda.

b) Izračunaj grupni indeks količine po metodu agregata sa ponderom iz baznog perioda.

Rešenje:

Vrsta proizvoda	Proizvodnja u kg		Vrednost proizvodnje		$p_0=\frac{q0p0}{q0}$	$p_1=\frac{q1p1}{q1}$	p_1q_0	q_1p_0
	q_0 (95)	q_1 (97)	q_0p_0 (95)	q_1p_1 (97)				
A	13	15	2 600	3 000	200	200	2 600	3 000
Б	24	28	2 800	4 500	116,7	160,7	3 856,8	3 267,6
B	12	20	2 500	3 800	208,3	190	2 280	4 166
Σ	-	-	7 900	11 300	-	-	8 736,8	10 433,6

$$oIq=\frac{\Sigma q_1p_0}{\Sigma q_0p_0} * 100\% = \frac{10\ 433,6}{7\ 900} = 132,07\%$$

$$oIp=\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0} * 100\% = \frac{8\ 736,8}{7\ 900} = 110,59\%$$

oIq pokazuje da je došlo do rasta količine u tekućoj u odnosu na baznu godinu za 32,07% prema cenama iz baznog perioda.

oIp pokazuje da je došlo do rasta cene u tekućoj u odnosu na baznu godinu za 10,59% prema količinama iz baznog perioda.

11. Izračunaj indeks troškova života četvoročlanog domaćinstva za period od 1995 – 2003. godine na osnovu podataka iz tabele:

Vrsta proizvoda	**Cena u 1995. godini p_o**	**Ip=pi*100/po**	**Prosečna potrošnja q u 2003. godini**
Hleb	**10**	**150**	**155**
Meso	**70**	**220**	**70**
Mleko	**15**	**200**	**145**
Odeća	**3000**	**160**	**2**
Obuća	**600**	**130**	**2**
Stanarina	**1110**	**100**	**12**
Električna energija	**1**	**180**	**3500**

Rešenje:

Proizvodnja	Cena u 1995. (Po)	Ip	Prosečna potrošnja (q)	Pi=(po*Ip)/100	piq	poq
Hleb	10	150	155	15	2325	1550
Meso	70	220	70	154	10780	4900
Mleko	15	200	145	30	4350	2175
Odeća	3000	160	2	4800	9600	6000
Obuća	600	130	2	780	1560	1200
Stanarina	1110	100	12	1110	13320	13320
El. Energija	1	180	3500	1,8	6300	3500
Σ				-	48235	32645

$$Ip=\frac{\Sigma piq}{\Sigma poq}*100\% \quad Ip=\frac{48235}{32645}*100\% =147,76\%$$

Došlo je do rasta troškova života u tekućoj godini u odnosu na baznu godinu za 47,76%.

12. Dati su lančani indeksi prodaje ulja za period od 1990 – 1996. g.

Godina	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
Lančani indeks (L)	**-**	**110**	**111**	**110**	**109**	**111**	**110**	**112**

a) Odredi eksponencijalnu stopu rasta.

b) Odredi prodaju po regionima, ako je prodaja u 1989. g. bila 154 miliona dinara.

Rešenje:

Da bi odredili eksponencijalnu stopu rasta računamo logaritamske vrednosti lančanih indeksa. Pošto za prvu godinu nemamo vrednost lančanih indeksa, a imamo podatke za 8 godina, lančane indekse za 7 godina, eksponencijalnu stopu računamo na osnovu 7 podataka, a ne osam. U ovom primeru godišnja stopa rasta prodaje po regionima (na osnovu eksponencijalne stope rasta) iznosi 9,65%.

Da bi odredili originalne podatke na osnovu lančanih indeksa koristimo osnovnu formulu za obračun lančanih indeksa:

$$Vi=\frac{yi}{yi-1}*100\%$$

ili Vi=(y1990*100)/y1989 za prvu godinu.

Ovde nam je poznata proizvodnja za 1989. i iznosi 154. Ukoliko u prethodnoj formuli zamenimo vrednosti dobijamo sledeći izraz: 110=(y1990*100)/154. U ovom izrazu nepoznat je lančani izraz za 1990. godinu. Okretanjem ovog obrasca dobijamo sledeći izraz: y1990=154*110/100=169,4≈169.
Za sledeću godinu koristimo sledeći izraz: y1991=169*111/100=187,59≈188.
Za sledeću godinu koristimo sledeći izraz: y1992=188*110/100=206,8≈207.
Za sledeću godinu koristimo sledeći izraz: y1993=207*109/100=225,63≈226.
Za sledeću godinu koristimo sledeći izraz: y1994=226*111/100=250,86≈251.
Za sledeću godinu koristimo sledeći izraz: y1995=251*110/100=276,1 ≈276.
Za sledeću godinu koristimo sledeći izraz: y1996=276*112/100=309.12≈309.

Godine	Lančani indeksi (L)	y	logL
1989	-	154	-
1990	110	169	2,04
1991	111	188	2,04
1992	110	207	2,04
1993	109	226	2,03
1994	111	251	2,04
1995	110	276	2,04
1996	112	309	2,05
Σ	-	1780	14,28

a) $G = N\sqrt{\frac{\sum logL}{n-1}} - 100 = N\sqrt{\frac{14{,}28}{7}} - 100 = N\sqrt{2{,}04} - 100 = 109{,}65 - 100 = 9{,}65\%$

b) $\text{Vrednost u 1990.} = \frac{110*154}{100} = 169{,}4$

13. Na osnovu proizvodnje ženskih čarapa za period od 1989 – 1994. g., odredi geometrijsku stopu rasta, na bazi originalnih podataka (Y), ako je proizvodnja u 1989. g., 128 hiljada komada.

Godina	**1989**	**1990**	**1991**	**1992**	**1993**	**1994**
Lančani indeks (L)	**-**	**119**	**112**	**114**	**116**	**121**

Rešenje:

Godine	Lančani indeksi (L)	y
1989	-	128
1990	119	152,32
1991	112	170,598
1992	114	194,46
1993	116	225,57
1994	121	272,94
Σ	-	-

$$Li=\frac{Yi}{Yi-1}*100 \qquad Yi=\frac{Yi-1*Li}{100} \qquad \text{Vrednost u 1990}=\frac{128*119}{100}=152{,}32$$

$$Rs=(5\sqrt{\frac{272{,}94}{128}}-1)*100=(\frac{1}{5}*\log 2{,}1323-1)*100$$

Rs=(antilog 0,06577 -1)*100=(1,1635 – 1)*100=0,1635*100=16,35%

Godišnja stopa rasta proizvodnje iznosi 16,35%.

14. Obim i vrednost proizvodnje jednog preduzeća električnih aparata je:

Vrsta proizvoda	Proizvodnja u 1990 (q_0)	Vrednost u 1990 (q_0p_0)	$Iq=qi*100/q_0$	$Ip=pi*100/p_0$
A	**45**	**1600**	**120**	**150**
B	**60**	**1800**	**150**	**160**
V	**38**	**1400**	**120**	**180**

Izračunaj grupni indeks fizičkog obima proizvodnje i grupni indeks cena po metodi agregata sa ponderom iz 1994. godine.

Rešenje:

Proi.	(qo)	qopo	Iq	Ip	Po	Pi	qi	qipi	qopi	poqi
A	45	1600	120	150	35,56	53,34	54	2880,36	2400,3	1920,24
Б	60	1800	150	160	30	48	90	4320	2880	2700
В	38	1400	120	180	36,84	66,31	45,6	3023,74	2519,8	1679,9
Σ	-	4800	-	-	-	-	-	10224,1	7800,1	6300,14

Po=qopo/qo pi=Ip*po/100 qi=Iq*qo/100

$$iIq=\frac{\sum qipi}{\sum qopi}*100=\frac{10224{,}1}{7800{,}1}*100=131{,}08\%$$

$$iIp=\frac{\sum piqi}{\sum poqi}*100=\frac{10224{,}1}{6300{,}14}*100=162{,}28\%$$

iIq pokazuje da je došlo do rasta količine u tekućoj u odnosu na baznu godinu za 31,08% prema cenama iz tekućeg perioda.

iIp pokazuje da je došlo do rasta cene u tekućoj u odnosu na baznu godinu za 62,28% prema količinama iz tekućeg perioda.

15. Obim proizvodnje i vrednost jednog preduzeća je:

Vrsta proizvoda	Proizvodnja		p_0q_0 (\`90)	$Ip=pi*100/p_0$
	’90 (q_0)	’96 (qi)		
A	45	57	800	270
B	60	70	1400	230
V	8	10	440	190

Izračunaj grupni indeks cene i količine sa ponderom iz tekućeg perioda po metodu srednjih vrednosti.

Rešenje:

Proi.	qo	qi	poqo	Ip	po	pi	qipi	qo/qi	po/pi	$\frac{qo}{qi}$ qipi	$\frac{po}{pi}$ qipi
A	45	57	800	270	18	48	2736	0,79	0,38	2161,44	1039,68
Б	60	70	1400	230	23	53	3710	0,86	0,43	3190,6	1595,3
B	8	10	440	190	55	105	1050	0,8	0,52	840	546
Σ	-	-	2640	-	-	-	7496	-	-	6192,04	3180,98

po=qopo/qo pi=Ip*po/100

$$iIq=\frac{\sum qipi}{\sum\frac{qo}{qi}qipi}*100=\frac{7496}{6192{,}04}*100=121{,}06\%$$

$$iIp=\frac{\sum piqi}{\sum\frac{po}{pi}poqi}*100=\frac{7496}{3180{,}98}*100=235{,}65\%$$

iIq pokazuje da je došlo do rasta količine u tekućoj u odnosu na baznu godinu za 21,06% prema cenama iz tekućeg perioda.

iIp pokazuje da je došlo do rasta cene u tekućoj u odnosu na baznu godinu za 35,65% prema količinama iz tekućeg perioda.

16. Na osnovu podataka datih u tabeli izračunaj Fišerov idealni indeks fizičkog obima prometa (1990=100%):

Vrsta proizvoda	Količina u 1990. godini q_o	Cena u 1990. (po)	Količina u 1993. (qi)	Cena u 1993. (pi)
A	200	4	200	3
B	400	3	500	2
C	200	5	300	4
D	300	4	400	6

Rešenje:

Proizv.	qo	p_o	qi	p_i	qipo	qipi	qopo	qopi
А	200	4	200	3	800	600	800	600
Б	400	3	500	2	1500	1000	1200	800
Ц	200	5	300	4	1500	1200	1000	800
Д	300	4	400	6	1600	2400	1200	1800
∑	-	-	-	-	5400	5200	4200	4000

$$iIq=\frac{\sum qipi}{\sum qopi} * 100\% = \frac{5200}{4000} * 100\% = 130\%$$

$$oIq=\frac{\sum qipo}{\sum qopo} * 100\% = \frac{5400}{4200} * 100\% = 128{,}571\%$$

$$fIq=(\sqrt{1{,}28571 * 1{,}3}) * 100\% = \sqrt{1{,}6714} * 100\% = 1{,}2928 * 100\% = 129{,}28\%$$

iIq pokazuje da je došlo do rasta količine u tekućoj u odnosu na baznu godinu za 30% prema cenama iz tekućeg perioda.

oIq pokazuje da je došlo do rasta količine u tekućoj u odnosu na baznu godinu za 28,571% prema cenama iz baznog perioda.

Fišerov idealni indeks količine pokazuje da je došlo do rasta količine u tekućem periodu u odnosu na bazni za 49,43%

17. Na osnovu podataka datih u tabeli izračunaj grupni indeks cene i količine sa ponderom iz baznog perioda (1993=100%):

Vrsta proizvoda	Količina u 1993. godini q_i	Cena u 1995. (pi)	(qipo)	(piqo)
A	200	8	1400	1200
B	420	6	2100	2040
C	350	5	2100	1000
D	300	7	1200	3080

Rešenje:

Proizvodi	qi	pi	qipo	piqo	$qo=\frac{piqo}{pi}$	$po=\frac{qipo}{qi}$	poqo
А	200	8	1400	1200	150	7	1050
Б	420	6	2100	2040	340	5	1700
Ц	350	5	2100	1000	200	6	1200
Д	300	7	1200	3080	440	4	1760
Σ	-	-	6800	7320	-	-	5710

$$oIq=\frac{\Sigma qipo}{\Sigma qopo} * 100\% = \frac{6800}{5710} = 119{,}09\%$$

$$oIp=\frac{\Sigma piqo}{\Sigma poqo} * 100\% = \frac{7320}{5710} * 100\% = 128{,}196\%$$

oIq pokazuje da je došlo do rasta količine u tekućoj u odnosu na baznu godinu za 19,09% prema cenama iz baznog perioda.

oIp pokazuje da je došlo do rasta cene u tekućoj u odnosu na baznu godinu za 28,196% prema količinama iz baznog perioda.

6.1. Indeksi plata i indeksi produktivnosti rada

1. Na osnovu podataka o broju radnika i visini plate odredite individualne indekse plata.

Stručna sprema	Broj radnika 2014. Ro	Broj radnika 2015. Ri	Mesečna plata xo	Mesečna plata xi
Visoka	18	10	3,2	5
Viša	25	12	5,25	4,8
Srednja	47	103	23,1	36,05
Σ	100	125	31,55	45,85

Rešenje:

Za određivanje individualnih indeksa plata moramo odrediti prosečnu platu svake kategorije radnika. Prosečna plata radnika u baznom periodu 1993. godine izračunava se formulom: $\overline{xo} = \frac{xo}{Ro}$, a u tekućem periodu 1994. formulom: $\overline{xi} = \frac{xi}{Ri}$. Prosečna zarada za obe posmatrane godine obračunata je u poslednje dve kolone.

Stručna sprema	Broj radnika 2014. Ro	Broj radnika 2015 Ri	Mesečna plata xo	Mesečna plata xi	Prosečna plata $\overline{xo}$	Prosečna plata $\overline{xi}$
Visoka	18	10	3,2	5	0,18	0,5
Viša	25	12	5,25	4,8	0,21	0,4
Srednja	47	103	23,1	36,05	0,49	0,35
Σ	100	125	31,55	45,85		

Individualni indeks plata za svaku kategoriju radnika računa se na sledeći način:

Visoka sprema:

$$Ipe(z) = \frac{\overline{xi}}{\overline{xo}} * 100\% = \frac{0,5}{0,18} * 100\% = 2,8125 * 100\% = 281,25\%$$

Plata zaposlenih sa visokom stručnom spremom veća je za 181,25% u 2015. godinu u odnosu na 2014. godinu.

Viša sprema:

$$Ipe(z) = \frac{\overline{xi}}{\overline{xo}} * 100\% = \frac{0,4}{0,21} * 100\% = 1,9048 * 100\% = 190,48\%$$

Plata zaposlenih sa višom stručnom spremom veća je za 90,48% u 2015. godinu u odnosu na 2014. godinu.

Srednja sprema:

$$Ipe(z) = \frac{\overline{xi}}{\overline{xo}} * 100\% = \frac{0,35}{0,49} * 100\% = 0,7113 * 100\% = 71,13\%$$

Plata zaposlenih sa srednjom stručnom spremom manja je za 28,87 % u 2015. godinu u odnosu na 2014. godinu.

2. Na osnovu podataka o broju radnika i visini plate odredite individualne indekse plata.

Stručna sprema	Broj radnika 2013. Ro	Broj radnika 2014. Ri	Mesečna plata xo	Mesečna plata xi
Visoka	12	23	4	6
Viša	15	21	6,2	8,7
Srednja	20	50	25,1	30
Σ	47	94	35,3	44,7

Rešenje:

Indeks plata možemo obračunati u tabeli (poslednja kolona) primenom iste formule kao u prethodnom zadatku.

Stručna sprema	Broj radnika 2013. Ro	Broj radnika 2014 Ri	Mesečna plata xo	Mesečna plata xi	$\overline{xo}$	$\overline{xi}$	Ipe(z)
Visoka	12	23	4	6	0,33	0,26	78,26
Viša	15	21	6,2	8,7	0,41	0,41	100,23
Srednja	20	50	25,1	30	1,26	0,6	47,81
Σ	47	94	35,3	44,7			

Plata zaposlenih sa visokom stručnom spremom manja je za 21,74 % u 2014. godinu u odnosu na 2013. godinu.

Plata zaposlenih sa višom stručnom spremom veća je za 0,23% u 2014. godinu u odnosu na 2013. godinu.

Plata zaposlenih sa srednjom stručnom spremom manja je za 52,19 % u 2014. godinu u odnosu na 2013. godinu.

3. Na osnovu podataka o broju radnika i visini plate odredite individualne indekse plata.

Stručna sprema	Broj radnika 2013. Ro	Broj radnika 2014. Ri	Mesečna plata xo	Mesečna plata xi
Visoka	15	29	5,6	7
Viša	20	25	10,2	12,7
Srednja	32	49	31,1	34
Σ	67	103	46,9	53,7

Rešenje:

Stručna sprema	Broj radnika 2013. Ro	Broj radnika 2014 Ri	Mesečna plata xo	Mesečna plata xi	$\overline{xo}$	$\overline{xi}$	Ipe(z)
Visoka	15	29	5,6	7	0,37	0,24	64,66
Viša	20	25	10,2	12,7	0,51	0,51	99,61
Srednja	32	49	31,1	34	0,97	0,69	71,40
Σ	67	103	46,9	53,7			

Plata zaposlenih sa visokom stručnom spremom manja je za 35,34 % u 2014. godinu u odnosu na 2013. godinu.

Plata zaposlenih sa višom stručnom spremom veća je za 0,39% u 2014. godinu u odnosu na 2013. godinu.

Plata zaposlenih sa srednjom stručnom spremom manja je za 28,60 % u 2014. godinu u odnosu na 2013. godinu.

4. Na osnovu podataka o broju radnika i visini plate odredite individualne indekse plata.

Stručna sprema	Broj radnika 2013. Ro	Broj radnika 2014. Ri	Mesečna plata xo	Mesečna plata xi
Visoka	30	35	10	17
Viša	23	26	11	12
Srednja	32	49	9	11
Σ	85	110	30	40

Rešenje:

Stručna sprema	Broj radnika 2013. Ro	Broj radnika 2014 Ri	Mesečna plata xo	Mesečna plata xi	$\overline{xo}$	$\overline{xi}$	Ipe(z)
Visoka	30	35	10	17	0,33	0,49	145,71
Viša	23	26	11	12	0,48	0,46	96,50
Srednja	32	49	9	11	0,28	0,22	79,82
Σ	85	110	30	40			

Plata zaposlenih sa visokom stručnom spremom veća je za 45,71% u 2014. godinu u odnosu na 2013. godinu.

Plata zaposlenih sa višom stručnom spremom manja je za 3,5% u 2014. godinu u odnosu na 2013. godinu.

Plata zaposlenih sa srednjom stručnom spremom manja je za 20,18% u 2014. godinu u odnosu na 2013. godinu.

5. Na osnovu podataka o broju radnika i visini plate odredite individualne indekse plata.

Stručna sprema	Broj radnika 2013. Ro	Broj radnika 2014. Ri	Mesečna plata xo	Mesečna plata xi
Visoka	13	10	5	7
Viša	23	15	7	6
Srednja	36	45	15	25
Σ	72	70	27	38

Rešenje:

Stručna sprema	Broj radnika 2013. Ro	Broj radnika 2014 Ri	Mesečna plata xo	Mesečna plata xi	$\overline{xo}$	$\overline{xi}$	Ipe(z)
Visoka	13	10	5	7	0,38	0,70	182,00
Viša	23	15	7	6	0,30	0,40	131,43
Srednja	36	45	15	25	0,42	0,56	133,33
Σ	72	70	27	38			

Plata zaposlenih sa visokom stručnom spremom veća je za 82% u 2014. godinu u odnosu na 2013. godinu.

Plata zaposlenih sa višom stručnom spremom veća je za 31,43% u 2014. godinu u odnosu na 2013. godinu.

Plata zaposlenih sa srednjom stručnom spremom manja je za 33,33% u 2014. godinu u odnosu na 2013. godinu.

6. Na osnovu podataka datih u tabeli izračunajte grupni indeks plata.

Stručna sprema	Broj radnika 2014. Ro	Broj radnika 2015. Ri	Suma plata (00) xo	Suma plata (00) xi
VKV	22	20	10000	13200
KV	90	70	31000	45000
PKV	30	40	10500	15200
NKV	10	8	2500	2400
Σ	152	138	54500	75800

Rešenje:

Za izračunavanje grupnog indeksa plata koristimo formulu:

$$Ipe(z) = \frac{\Sigma \overline{xi}}{\Sigma \overline{xo}} * 100\%$$

Stručna sprema	Broj radnika 1993. Ro	Broj radnika 1994 Ri	Suma plata xo	Suma plata xi	$\overline{xo}$	$\overline{xi}$	Ipe(z)	Ipe(z)*Ri
VKV	22	20	10000	13200	454,55	660,00	1,45	29,04
KV	90	70	31000	45000	344,44	642,86	1,87	130,65
PKV	30	40	10500	15200	350,00	380,00	1,09	43,43
NKV	10	8	2500	2400	250,00	300,00	1,20	9,60
Σ	152	138	54500	75800	358,55	549,28	1,53	212,71

Ukupnu prosečnu zaradu po godinama dobijamo iz poslednjeg reda (Σ) u kolonama $\overline{xo}$ i $\overline{xi}$. Prosečna zarada za 2014. godinu iznosi 358,55 stotina dinara, a za 2015. godinu 549,28 stotina dinara. Na osnovu toga računamo grupni indeks plata:

$$Ipe(z) = \frac{\Sigma \overline{xi}}{\Sigma \overline{xo}} * 100\% = \frac{549{,}28}{358{,}55} * 100\% = 1{,}53 * 100\% = 153\,\%$$

Došlo je do ukupnog porasta zarada svih zaposlenih za 53%.

Grupni indeks zarada za nepromenljiv sastav zaposlenih se računa na sledeći način:

$$Ipe'(z) = \frac{\Sigma Ipe(z) * Ri}{\Sigma Ri} * 100\%$$

Zbir Ipe(z)*Ri čitamo iz poslednjeg reda poslednje kolone i zamenjujemo u formuli:

$$Ipe(z)' = \frac{\Sigma Ipe(z) * Ri}{\Sigma Ri} * 100\% = \frac{212{,}71}{138} * 100\% = 1{,}5414 * 100\% = 154{,}14\%$$

Ukoliko isključimo iz analize promenu sastava zaposlenih grupni indeks zarada pokazuje da je došlo do porasta zarada u tekućoj u odnosu na prethodnu godinu za 54,14%.

Uticaj promena u strukturi zaposlenih na promene rezultat promeni zarada utvrđuje se na sledeći način:

Ipe(z)/Ipe(z)'=1,53/1,5414*100%=0,9926*100=99,26%

Promene u strukturi zaposlenih uticale su na smanjenje nivoa zarada za 0,74%.

7. Na osnovu podataka datih u tabeli izračunajte grupni indeks plata.

Stručna sprema	Broj radnika 2014. Ro	Broj radnika 2015. Ri	Suma plata (00) xo	Suma plata (00) xi
VKV	35	30	13000	16200
KV	80	60	29000	40000
PKV	45	40	15000	17000
NKV	15	12	2500	2100
Σ	175	142	59500	75300

Rešenje:

Stručna sprema	Broj radnika 1993. Ro	Broj radnika 1994 Ri	Suma plata xo	Suma plata xi	$\overline{xo}$	$\overline{xi}$	Ipe(z)	Ipe(z)*Ri
VKV	35	30	13000	16200	371,43	540,00	1,45	43,62
KV	80	60	29000	40000	362,50	666,67	1,84	110,34
PKV	45	40	15000	17000	333,33	425,00	1,28	51,00
NKV	15	12	2500	2100	166,67	175,00	1,05	12,60
Σ	175	142	59500	75300	340,00	530,28	1,56	217,56

$$Ipe(z) = \frac{\Sigma \overline{xi}}{\Sigma \overline{xo}} * 100\% = \frac{530{,}28}{340{,}00} * 100\% = 1{,}5596 * 100\% = 155{,}96\%$$

Došlo je do ukupnog porasta zarada svih zaposlenih za 55,96%.

$$I'pe(z)=\frac{\Sigma Ipe(z)*Ri}{\Sigma Ri}*100\%=\frac{217{,}56}{142}*100\%=1{,}5321*100\%=153{,}21\%$$

Ukoliko isključimo iz analize promenu sastava zaposlenih grupni indeks zarada pokazuje da je došlo do porasta zarada u tekućoj u odnosu na prethodnu godinu za 53,21%.

Ipe(z)/Ipe(z)’=1,5596/1,5321*100%=1,0179*100=101,79%

Promene u strukturi zaposlenih uticale su na povećanje nivoa zarada za 1,79%.

8. Na osnovu podataka datih u tabeli izračunajte grupni indeks plata.

Stručna sprema	Broj radnika 2014. Ro	Broj radnika 2015. Ri	Suma plata (00) xo	Suma plata (00) xi
VKV	45	38	15000	19900
KV	76	68	32000	42000
PKV	52	43	25000	27000
NKV	20	25	4000	5000
Σ	193	174	76000	93900

Rešenje:

Stručna sprema	Broj radnika 1993. Ro	Broj radnika 1994 Ri	Suma plata xo	Suma plata xi	$\overline{xo}$	$\overline{xi}$	Ipe(z)	Ipe(z)*Ri
VKV	45	38	15000	19900	333,33	523,68	1,57	59,70
KV	76	68	32000	42000	421,05	617,65	1,47	99,75
PKV	52	43	25000	27000	480,77	627,91	1,31	56,16
NKV	20	25	4000	5000	200,00	200,00	1,00	25,00
Σ	193	174	76000	93900	393,78	539,66	1,37	240,61

$$Ipe(z)=\frac{\Sigma\overline{xi}}{\Sigma\overline{xo}}*100\%=\frac{539{,}66}{393{,}78}*100\%=1{,}3705*100\%=137{,}05\%$$

Došlo je do ukupnog porasta zarada svih zaposlenih za 37,05%.

$$I'pe(z)=\frac{\Sigma Ipe(z)*Ri}{\Sigma Ri}*100\%=\frac{240{,}61}{174}*100\%=1{,}3828*100\%=138{,}28\%$$

Ukoliko isključimo iz analize promenu sastava zaposlenih grupni indeks zarada pokazuje da je došlo do porasta zarada u tekućoj u odnosu na prethodnu godinu za 38,28%.

Ipe(z)/Ipe(z)'=1,3705/1,3828*100%=0,9911 *100=99,11%

Promene u strukturi zaposlenih uticale su na povećanje nivoa zarada za 0,89%.

9. Na osnovu podataka datih u tabeli izračunajte grupni indeks plata.

Stručna sprema	Broj radnika 2014. Ro	Broj radnika 2015. Ri	Suma plata (00) xo	Suma plata (00) xi
VKV	55	56	16000	19200
KV	66	78	45000	43300
PKV	53	65	24000	28000
NKV	30	35	5000	6000
Σ	204	234	90000	96500

Rešenje:

Stručna sprema	Broj radnika 1993. Ro	Broj radnika 1994 Ri	Suma plata xo	Suma plata xi	$\overline{xo}$	$\overline{xi}$	Ipe(z)	Ipe(z)*Ri
VKV	55	56	16000	19200	290,91	342,86	1,18	66,00
KV	66	78	45000	43300	681,82	555,13	0,81	63,51
PKV	53	65	24000	28000	452,83	430,77	0,95	61,83
NKV	30	35	5000	6000	166,67	171,43	1,03	36,00
Σ	204	234	90000	96500	441,18	412,39	0,93	227,34

$$Ipe(z) = \frac{\Sigma \overline{xi}}{\Sigma \overline{xo}} * 100\% = \frac{412,39}{441,18} * 100\% = 0,9347 * 100\% = 93,47\%$$

Došlo je do ukupnog pada zarada svih zaposlenih za 6,53%.

$$Ipe(z)' = \frac{\Sigma Ipe(z) * Ri}{\Sigma Ri} * 100\% = \frac{227,34}{234} * 100\% = 0,9715 * 100\% = 97,15\%$$

Ukoliko isključimo iz analize promenu sastava zaposlenih grupni indeks zarada pokazuje da je došlo do pada zarada u tekućoj u odnosu na prethodnu godinu za 2,85%.

Ipe(z)/Ipe(z)'=0,9347/0,9715*100%=0,9621 *100=96,21%

Promene u strukturi zaposlenih uticale su na smanjenje nivoa zarada za 3,79%.

10. Na osnovu podataka datih u tabeli izračunajte grupni indeks plata.

Stručna sprema	Broj radnika 2014. Ro	Broj radnika 2015. Ri	Suma plata (00) xo	Suma plata (00) xi
VKV	53	57	45000	42000
KV	63	72	47000	44000
PKV	52	45	25000	29000
NKV	23	25	6000	7000
Σ	191	199	123000	122000

Rešenje:

Stručna sprema	Broj radnika 1993. Ro	Broj radnika 1994 Ri	Suma plata xo	Suma plata xi	$\overline{xo}$	$\overline{xi}$	Ipe(z)	Ipe(z)*Ri
VKV	53	57	45000	42000	849,06	736,84	0,87	49,47
KV	63	72	47000	44000	746,03	611,11	0,82	58,98
PKV	52	45	25000	29000	480,77	644,44	1,34	60,32
NKV	23	25	6000	7000	260,87	280,00	1,07	26,83
Σ	191	199	123000	122000	643,98	613,07	0,95	195,60

$$Ipe(z) = \frac{\Sigma \overline{xi}}{\Sigma \overline{xo}} * 100\% = \frac{613{,}07}{643{,}98} * 100\% = 0{,}9520 * 100\% = 95{,}20\%$$

Došlo je do ukupnog pada zarada svih zaposlenih za 4,8%.

$$Ipe(z)' = \frac{\Sigma Ipe(z) * Ri}{\Sigma Ri} * 100\% = \frac{195{,}60}{199} * 100\% = 0{,}9829 * 100\% = 98{,}29\%$$

Ukoliko isključimo iz analize promenu sastava zaposlenih grupni indeks zarada pokazuje da je došlo do pada zarada u tekućoj u odnosu na prethodnu godinu za 1,71%.

Ipe(z)/Ipe(z)’=0,9520 /0,9829*100%=0,9686 *100=96,86%

Promene u strukturi zaposlenih uticale su na smanjenje nivoa zarada za 3,14%.

7. Statistika poslovanja preduzeća

1. U jednom preduzeću radi 11 mašina. Proizvodna sposobnost mašine je 20 komada proizvoda po smeni. Radi se u 3 smene. Mogući fond radnog vremena je 315 dana. Ako se za 285 dana ostvari 155000 proizvoda, izračunaj pokazatelje iskorišćenja kapaciteta.

Rešenje:

Koeficijent ekstenzivnog iskorišćenja kapaciteta dobija se:

$$Kek = \frac{Ostvareno\ vreme\ rada}{Moguće\ vreme\ rada} * 100\% = \frac{285}{315} * 100\% = 90{,}48\%$$

Gubitak u iskorišćenju kapaciteta usled nedovoljnog vremenskog angažovanja kapaciteta izosi 9,52%.

Jedinica kapaciteta može biti jedan dan, jedan čas, jedna smena, jedan dan i jedna mašina, jedna smena i jedna mašina, jedan čas i jedna mašina itd. Jedinicu kapaciteta određujemo prema podatku koji je dat o mogućoj proizvodnji po jedinici kapaciteta. U ovom zadatku moguća proizvodnja po jedinici kapaciteta (sposobnost mašine po smeni) je 20 komada. Jedinica kapaciteta je jedna mašina i jedna smena. Ostvarenu proizvodnju po jedinici kapaciteta dobijamo deljenjem ostvarene godišnje proizvodnje brojem dana i dobijamo dnevnu proizvodnju. Pošto se radi u tri smene, kada dnevnu proizvodnju podelimo sa 3 smene dobijemo proizvodnju po smeni, ali za sve 11 mašine, a nama je potrebno da znamo koliko jenda mašina proizvede za jednu smenu. Do ostvarene proizvodnje mašine po smeni dolazimo deljenjem ostvarene proizvodnje za jednu smenu sa brojem mašina.

$$\begin{matrix} Ostvarena\ proizvodnja \\ po\ jedinici\ kapaciteta \end{matrix} = \frac{155\,000}{285*3*11} = 16{,}48$$

Koeficijent intenzivnog iskorišćenja kapaciteta dobija se:

$$Kik = \frac{Ostvarena\ proizvodnja\ po\ jedinici\ kapaciteta}{Moguća\ proizvodnja\ po\ jedinici\ kapaciteta} * 100\% = \frac{16{,}48}{20} * 100\% = 82{,}4\%$$

Gubitak zbog nedovoljno intenzivnog korišćenja kapaciteta iznosi 17,6%.

Mogući godišnji kapacitet dobijamo tako što krećemo od moguće proizvodnje po jedinici kapaciteta, odnosno, od moguće proizvodnje jedne mašine po smeni i množimo je sa brojem mašina. Dobijamo proizvodnju svih mašina po smeni. U radnom danu moguće je raditi 3 smene, tako da se množenjem prethodnog rezultata brojem smena dobija dnevna proizvodnja. U toku godine može da se radi 315 dana, pa množenjem dnevne proizvodnje sa 315 dana dobijamo mogući godišnji kapacitet.

$$Kiik=\frac{Ostvarena\ godišnja\ proizvodnja}{Mogući\ godišnji\ kapacitet}*100\%=\frac{155\ 000}{11*20*3*315}*100\%$$

$$Kiik=\frac{155\ 000}{207\ 900}*100\%=74{,}56\%$$

Sve je to dovelo do ukupnog gubitka u iskorišćenju kapaciteta od 25,44%.

2. U toku oktobra meseca ostvareno je 110 000 radnik-časova za 25 radnih dana. Prosečno je na posao dolazilo 620 radnika, što je 87% ukupnog broja zaposlenih. Radi se 8 časova.

a) Odredi mogući fond časova rada i

b) Koeficijent integralnog iskorišćenja radnog vremena.

$$Ukupan\ broj\ zaposlenih=\frac{620*100}{87}=713$$

$$Mogući\ fond\ časova\ rada=713*8*25=142\ 600$$

$$Kiirv=\frac{Ostvareni\ efektivni\ časovi\ rada\ radnika}{Mogući\ fond\ časova\ rada\ radnika}*100\%=\frac{110\ 000}{142\ 600}*100\%=77{,}14\%$$

U preduzeću je došlo do gubitka radnog vremena u iznosu od 22,86% zbog izostajanja radnika sa posla, ali i zbog nedovoljnog iskorišćenja radnog dana onih radnika koji su dolazili na posao.

3. Godišnja proizvodnja jedne pekare je 206 000 kg hleba. Moguće i ostvareno vreme rada je 350 dana. Proizvodni kapaciteti pekare iskorišćeni su sa 92%. Odredi ostvarenu i moguću dnevnu proizvodnju.

Rešenja:

$$Ostvarena\ dnevna\ proizvodnja=\frac{206\ 000}{350}=588{,}57$$

$$Moguća\ dnevna\ proizvodnja=\frac{588{,}57*100}{92}=639{,}75$$

4. U preduzeću sa 5000 radnika, u maju mesecu ostvareno je 24 radnih dana, 108 000 radnik-dana i 540 000 radnik-časova i prosečno je dolazilo na posao 4500 radnika. Izračunajte pokazatelje iskorišćenja radnog vremena ukoliko je, prosečno trajanje radnog dana 5 časova, a mogući fond časova rada 840 000 i radi se 7 sati.

Rešenje:

$$Kirs = \frac{Prosečan\ broj\ zaposlenih\ radnika}{Ukupan\ broj\ zaposlenih\ radnika} * 100\% = \frac{4500}{5000} * 100\% = 90\%$$

$$Kird = \frac{Prosečno\ trajanje\ radnog\ dana}{7\ (8)} * 100\% = \frac{5}{7} * 100\% = 71,43\%$$

$$Kiirv = \frac{Ostvareni\ efektivni\ časovi\ rada\ radnika}{Mogući\ fond\ časova\ rada\ radnika} * 100\% = \frac{540000}{840000} * 100\% = 64,29\%$$

U preduzeću je došlo do gubitka radnog vremena u iznosu od 10% zbog izostajanja radnika sa posla, 28,57% zbog nedovoljnog iskorišćenja radnog dana onih radnika koji su dolazili na posao, a sve to je dovelo do ukupnog gubitka u iskorišćenju radnog vremena u iznosu od 35,71%..

5. Godišnja proizvodnja jedne pekare je 207 000kg peciva. Moguće i ostvareno vreme rada je 353 dana. Proizvodni kapaciteti pekare iskorišćeni su sa 94%.
a) Utvrdi moguću i ostvarenu dnevnu proizvodnju.

Rešenje:

$$\text{Ostvarena dnevna proizvodnja} = \frac{207000}{353} = 586{,}40$$

$$\text{Moguća dnevna proizvodnja} = \frac{100*586{,}4}{94} = 623{,}83$$

6. U preduzeću sa 3000 radnika, u maju mesecu ostvareno je 27 radnih dana, 75000 radnik-dana i 405000 radnik-časova. Izračunajte pokazatelje iskorišćenja radnog vremena ukoliko je prosečan broj zaposlenih 2778, prosečno trajanje radnog dana 5,4 časova, a mogući fond časova rada 567000 i radi se 7 sati.

Rešenje:

$$Kirs = \frac{Prosečan\ broj\ zaposlenih\ radnika}{Ukupan\ broj\ zaposlenih\ radnika} * 100\% = \frac{2778}{3000} * 100\% = 92{,}60\%$$

$$Kird = \frac{Prosečno\ trajanje\ radnog\ dana}{7\ (8)} . * 100\% = \frac{5{,}4}{7} * 100\% = 71{,}14\%$$

$$Kiirv=\frac{Ostvareni\ efektivni\ časovi\ rada\ radnika}{Mogući\ fond\ časova\ rada\ radnika}*100\%=\frac{405000}{567000}*100\%=71{,}43\%$$

U preduzeću je došlo do gubitka radnog vremena u iznosu od 7,4% zbog izostajanja radnika sa posla, 28,86% zbog nedovoljnog iskorišćenja radnog dana onih radnika koji su dolazili na posao, a sve to je dovelo do ukupnog gubitka u iskorišćenju radnog vremena u izosu od 28,57%..

7. 1020 radnika jednog preduzeća dolazilo je redovno na posao u toku maja meseca (26 radnih dana) i ostvarilo je 145 000 radnik časova. Izračunaj pokazatelje iskorišćenja radnog vremena. Radi se 7h.

Rešenje:

$$Kirs=\frac{1020}{1020}*100\%=100\%$$

$$Radnik\ dani=1020*26=26520$$

$$Prosečno\ trajanje\ radnog\ dana=\frac{145000}{26520}=5{,}47$$

Ostvareni časovi rada= 7*26*1020=185640

$$Kird=\frac{5{,}47}{7}*100=78{,}14\%$$

$$Kiirv=\frac{145000}{185640}*100=78{,}11\%$$

U preduzeću je došlo do gubitka u iskorišćenju radnog vremena u iznosu od 21,86% zbog nedovoljnog iskorišćenja radnog dana onih radnika koji su dolazili na posao, a sve to je dovelo do ukupnog gubitka u iskorišćenju radnog vremena u iznosu od 21,89%.

8. U preduzeću sa 600 zaposlenih, u toku marta meseca 2001. godine, za 25 radnih dana u trajanju od 7^h ostvareno je 10800 radnik – dana, i 65000 radnik – časova. Izračunaj pokazatelje iskorišćenja radnog vremena.

Rešenje:

$$Kirs=\frac{432}{600}*100\%=72\%$$

$$Prosečan\ broj\ zaposlenih=\frac{10800}{25}=432$$

$$Kird=\frac{6{,}02}{7}*100\%=86\%$$

$$Prosečno\ trajanje\ radnog\ dana=\frac{65000}{10800}=6{,}02$$

$$Kiirv=\frac{65000}{600*25*7}*100\%=\frac{65000}{105000}*100\%=61{,}90\%$$

U preduzeću je došlo do gubitka radnog vremena u iznosu od 28% zbog izostajanja radnika sa posla, 14% zbog nedovoljnog iskorišćenja radnog dana onih radnika koji su dolazili na posao, a sve to je dovelo do ukupnog gubitka u iskorišćenju radnog vremena u izosu od 38,1%.

9. U preduzeću od 550 zaposlenih radnika u toku V meseca, ostvareno je za 25 radnih dana u trajanju od 7h 11500 radnik dana i 70000 radnik časova. Izračunaj pokazatelje iskorišćenja radnog vremena.

Rešenje:

$$\text{Kirs}=\frac{460}{550}*100=83{,}64\%$$

$$\text{Prosečan broj zaposlenih}=\frac{11500}{25}=460$$

$$\text{Kird}=\frac{6{,}09}{7}*100=87\%$$

$$\text{Prosečno trajanje radnog dana}=\frac{70000}{11500}=6{,}09$$

$$\text{Kiirv}=\frac{70000}{96250}*100=72{,}73\%$$

$$\text{Mogući časovi rada}=550*7*25=96250$$

U preduzeću je došlo do gubitka radnog vremena u iznosu od 16,36% zbog izostajanja radnika sa posla, 13% zbog nedovoljnog iskorišćenja radnog dana onih radnika koji su dolazili na posao, a sve to je dovelo do ukupnog gubitka u iskorišćenju radnog vremena u izosu od 27,27%.

10. Radeći u dve smene 78 radnih dana po 8h na 30 mašina proizvedeno je 1 050 000 komada proizvoda „H“. Mogući fond radnog vremena je 90 dana. Koliko su iskorišćeni kapaciteti ako je satni kapacitet mašine 30 komada proizvoda?

Rešenje:

$$\text{Ostvarena proizvodnja po jed. kapac.}=\frac{1050000}{2*8*30*78}=28{,}045$$

$$\text{Moguća godišnja proizvodnja}=2*8*30*30*90=1296000$$

$$\text{Kek}=\frac{78}{90}*100=86{,}67\% \qquad \text{Kik}=\frac{28}{30}*100=93{,}33\%$$

$$\text{Kiik}=\frac{1050000}{1296000}*100=81{,}02\%$$

Gubitak u iskorišćenju kapaciteta usled nedovoljnog vremenskog angažovanja kapaciteta izosi 13,33%. Gubitak zbog nedovoljno intenzivnog korišćenja kapaciteta iznosi 6,67%. Sve je to dovelo do ukupnog gubitka u iskorišćenju kapaciteta od 18,98%.

11. Jedno preduzeće radi na 8 mašina istovremeno i proizvede po 6 komada proizvoda „A“ po smeni. Radi se u dve smene i za 330 dana proizvedeno je 3000 komada proizvoda „A“. Izračunaj pokazatelje iskorišćenja kapaciteta.

Rešenje:

$$\text{Ostvarena proizvodnja po jedinici kapaciteta} = \frac{3000}{330*2} = 4{,}545$$

$$\text{Kek} = \frac{330}{330} * 100\% = 1 * 100\% = 100\%$$

$$\text{Kik} = \frac{4{,}545}{6} * 100\% = 0{,}7575 * 100\% = 75{,}75\%$$

$$\text{Kiik} = \frac{3000}{6*330*2} * 100\% = \frac{3000}{3960} * 100\% = 0{,}7575 * 100\% = 75{,}75\%$$

Gubitak zbog nedovoljno intenzivnog korišćenja kapaciteta iznosi 24,25% što je ujedno i ukupni gubitak u iskorišćenju kapaciteta.

12. Preduzeće radeći na 7 mašina proizvede 6 komada proizvoda „B“ za jednu smenu. Radi se 2 smene i za 335 dana proizvedeno je 2900 komada proizvoda „B“. Izračunaj sve koeficijente iskorišćenja kapaciteta.

Rešenje:

$$\text{Ostvarena proizvodnja po jedinici kapaciteta} = \frac{2900}{335*2} = 4{,}328$$

$$\text{Kek} = \frac{335}{335} * 100\% = 1 * 100\% = 100\%$$

$$\text{Kik} = \frac{4{,}328}{6} * 100\% = 0{,}72139 * 100\% = 72{,}139\%$$

$$\text{Kiik} = \frac{2900}{6*335*2} * 100\% = \frac{2900}{4020} * 100\% = 0{,}72139 * 100\% = 72{,}139\%$$

Gubitak zbog nedovoljno intenzivnog korišćenja kapaciteta iznosi 27,861% što je ujedno i ukupni gubitak u iskorišćenju kapaciteta.

13. Jedno preduzeće radi na 5 mašina istovremeno i proizvede po 15 komada proizvoda „A“ dnevno. Radi se u dve smene i za 350 dana proizvedeno je 5000 komada proizvoda „A“. Izračunaj pokazatelje iskorišćenja kapaciteta.

Rešenje:

$$\text{Ostvarena proizvodnja po jedinici kapaciteta} = \frac{5000}{350} = 14{,}286$$

$$\text{Kek} = \frac{350}{350} * 100\% = 1 * 100\% = 100\%$$

$$\text{Kik} = \frac{14{,}286}{15} * 100\% = 0{,}9524 * 100\% = 95{,}24\%$$

$$\text{Kiik} = \frac{5000}{15 * 350} * 100\% = \frac{5000}{5250} * 100\% = 95{,}24\%$$

Gubitak zbog nedovoljno intenzivnog korišćenja kapaciteta iznosi 4,76% što je ujedno i ukupni gubitak u iskorišćenju kapaciteta.

14. U preduzeću sa 800 zaposlenih, u toku marta meseca 2010. godine, za 28 radnih dana u trajanju od 7^h ostvareno je 15900 radnik – dana, i 95000 radnik – časova. Izračunaj pokazatelje iskorišćenja radnog vremena.

Rešenje:

$$\text{Prosečan broj zaposlenih radnika} = \frac{15900}{28} = 567{,}9 \approx 568$$

$$\text{Kirs} = \frac{568}{800} * 100\% = 0{,}71 * 100 = 71\%$$

$$\text{Prosečno trajanje radnog dana} = \frac{95000}{15900} = 5{,}97$$

$$\text{Kird} = \frac{5{,}97}{7} * 100\% = 85{,}29\%$$

$$\text{Kiirv} = \frac{95000}{800 * 28 * 7} * 100\% = \frac{95000}{156800} * 100\% = 60{,}59\%$$

U preduzeću je došlo do gubitka radnog vremena u iznosu od 29% zbog izostajanja radnika sa posla, 14,71% zbog nedovoljnog iskorišćenja radnog dana onih radnika koji su dolazili na posao, a sve to je dovelo do ukupnog gubitka u iskorišćenju radnog vremena u izosu od 39,41%.

15. Ukupan nominalni utrošak materijala jednog preduzeća u toku godine bio je 420.000, a ukupan stvarni utrošak 451.000. Izračunaj koeficijent iskorišćenja sirovina.

Rešenje:

$$\text{Koeficijent iskorišćenosti sirovina} = \frac{\text{Normirani - stvarni utrošak}}{\text{Ukupni normirani utrošak}} * 100\%$$

$$\text{Koeficijent iskorišćenosti sirovina} = \frac{420000 - 451000}{420000} * 100\%$$

$$\text{Koeficijent iskorišćenosti sirovina} = \frac{-31000}{420000} * 100\% = -0{,}0738 * 100 = -7{,}38\%$$

Došlo je do prekoračenja normiranog utroška za 7,38%. Neophodno je otkriti razloge njegove pojave.

8. Prilozi

8.1. Formule iz Poslovne statistike

$i = \frac{Xmax - Xmin}{k}$, k=1 + 3,3logN $\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{N} xi}{N}$,

$\overline{X} = \frac{\sum fixi}{N=\sum fi}$ G= $\sqrt[N]{\frac{\sum \log x}{n}}$, G= $\sqrt[N]{\frac{\sum f * \log x}{\sum f}}$,

H=$\frac{N}{\sum \frac{1}{xi}}$, H=$\frac{N}{\sum \frac{fi}{xi}}$, R=xmax – xmin

Me = L+ $\frac{\frac{N}{2} - \sum fi<m}{fm} i$, Mo = L + $\frac{(f2-f1)}{(f2-f1)+(f2-f3)} i$,

SD = $\frac{\sum |xi - \overline{X}|}{N}$, SD = $\frac{\sum fi |xi - \overline{X}|}{N}$, $\sigma^2 = \frac{\sum (xi - \overline{X})^2}{N}$,

$\sigma^2 = \frac{\sum xi^2}{N} - \overline{X}^2$, $\sigma^2 = \frac{\sum fi(xi - \overline{X})^2}{N}$, $\sigma^2 = \frac{\sum fixi^2}{N} - \overline{X}^2$,

Mk = $\frac{\sum (xi - \overline{X})^k}{N}$, Mk = $\frac{\sum fi(xi - \overline{X})^k}{N}$, $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$,

V(x) = $\frac{\sigma}{\overline{x}}$ 100%, $V(x)^2 = \frac{\sigma^2}{\overline{x}^2}$ 100%, $\alpha_3 = \frac{M^3}{\sigma^3}$,

$\alpha_4 = \frac{M^4}{\sigma^4}$,

m – $Z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \overline{X} \leq$ m + $Z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$, Sn/$\sqrt{n-1}$,

$m - t_{n-1;\alpha/2}\frac{Sn}{\sqrt{n-1}} \le \overline{X} \le m + t_{n-1;\alpha/2}\frac{Sn}{\sqrt{n-1}}$, $\quad Sn = \sqrt{\frac{\sum(xi-m)2}{n}}$,

$Sn = \sqrt{\frac{\sum fi(xi-m)2}{n}}$, $\quad Sn^2 = \frac{\sum xi2}{n} - m^2$, $\quad Sn^2 = \frac{\sum fixi2}{n} - m^2$,

np_0, $\quad n(1-p_0)$,

$P - Z_{1-\alpha/2}Sp \le p \le P + Z_{1-\alpha/2}Sp$, $\quad Sp = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$, $\quad P = \frac{f}{n}$,

$P - t_{n-1;\alpha/2}Sp \le p \le P + t_{n-1;\alpha/2}Sp$

$Z = \frac{m-\overline{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$, $\quad t_{n-1} = \frac{m-\overline{X}}{Sn}\sqrt{n-1}$, $\quad Z = \frac{P-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$,

$y_i=B_o+B_1X$, $\quad B_1 = \frac{n\sum xy-\sum x\sum y}{n\sum x^2-(\sum x)^2}$, $\quad B_0 = \frac{\sum x^2\sum y-\sum x\sum xy}{n\sum x^2-(\sum x)^2}$,

$B_0 = \overline{y} - B_1\overline{X}$ $\quad R^2=B_1^2\frac{\sum x^2-n\overline{X}^2}{\sum y^2-n\overline{y}^2}$ $\quad Se = \sqrt{\frac{\sum y^2-Bo\sum y-B1\sum xy}{n-2}}$,

$y_c - z_{1-\alpha/2}\, Se \le y` \le y_c + z_{1-\alpha/2}\, Se$,

$y_c - t_{n-2;\alpha/2}\, Se \le y` \le y_c + t_{n-2;\alpha/2}\, Se$,

$$r=\frac{N\sum XY-\sum X\sum Y}{\sqrt{N\sum X^2-(\sum X)^2}\sqrt{N\sum Y^2-(\sum Y)^2}}$$

$$R=\frac{n\sum xy-\sum x\sum y}{\sqrt{n\sum x^2-(\sum x)^2}\sqrt{n\sum y^2-(\sum y)^2}},$$

$r_s = 1 - \frac{6\sum di^2}{N(N^2-1)}$, $\quad \overline{X}=\overline{y}=\frac{1+N}{2}$, $\quad \sigma_x= \sigma_y=\frac{N^2-1}{12}$,

$$\sigma_e^2 = \frac{\Sigma(y - y`)^2}{N}$$ $$\sigma_{xy} = \frac{N^2 - 1}{12} - \frac{1}{2N}\sum di^2$$ $$\sigma_e = \sqrt{\sigma_e^2}$$

$$\sigma_{y`}^2 = \frac{\Sigma(y` - \bar{y})^2}{N}$$ $$\sigma_y^2 = \frac{\Sigma(y - \bar{y})^2}{N}$$ $$\sigma_y^2 = \sigma_{y`} + \sigma_e^2$$

$$S_{ysp} = Se\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(xp - \bar{X})^2}{\sum x^2 - n\bar{X}^2}}$$

$y_{cp} - z_{1-\alpha/2}\, S_{ysp} \leq y` \leq y_{cp} + z_{1-\alpha/2}\, S_{ysp}$,

$y_{cp} - t_{n-2;\alpha/2}\, S_{ysp} \leq y` \leq y_{cp} + t_{n-2;\alpha/2}\, S_{ysp}$,

$$S_{yp} = Se\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(xp - \bar{X})^2}{\sum X^2 - n\bar{X}^2}}$$

$y_p - z_{1-\alpha/2}\, S_{yp} \leq y` \leq y_p + z_{1-\alpha/2}\, S_{yp}$,

$y_p - t_{n-2;\alpha/2}\, S_{yp} \leq y` \leq y_p + t_{n-2;\alpha/2}\, S_{yp}$,

$$S_{Bo} = Se\sqrt{\frac{\sum x^2}{n(\sum x^2 - n\bar{X}^2)}}$$

$$S_{B1} = \frac{Se}{\sqrt{\sum X^2 - n\bar{X}^2}}$$ $b_o - t_{n-2;\alpha/2}\, S_{Bo} \leq y` \leq b_o + t_{n-2;\alpha/2}\, S_{Bo}$

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$ $$\sigma_{xy} = \frac{\Sigma(X - \bar{X}_x)(Y - \bar{X}_y)}{N}$$ $$\sigma_x^2 = \frac{\Sigma(X - \bar{X}_x)^2}{N}$$

$$\sigma_y^2 = \frac{\Sigma(Y - \bar{X}_y)^2}{N}$$ $$R = \frac{Sxy}{Sx\, Sy}$$ $$S_{xy} = \frac{\Sigma(X - \bar{X})(Y - \bar{y})}{n-1}$$

$$S_x = \sqrt{\frac{\Sigma(X - \bar{X})^2}{n-1}}$$ $$S_y = \sqrt{\frac{\Sigma(Y - \bar{y})^2}{n-1}}$$ $$yt = bo + b_1 x$$

$$bo = \frac{\Sigma y}{N}$$ $$b_1 = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2}$$ $$S_y = \sqrt{\frac{\Sigma(y - yt)^2}{N}}$$

$$Rs = \left(\sqrt[n-1]{\frac{yn}{y1}} - 1\right) * 100\%$$

$$yt = bo + b_1x + b_2x^2 \qquad bo = \frac{\sum y - b_2 \sum x^2}{N}$$

$$b_1 = \frac{\sum xy}{\sum x^2} \qquad b_2 = \frac{N\sum x^2 y - \sum y \sum x^2}{N\sum x^4 - (\sum x^2)^2} \qquad yt = bo * b_1^x$$

$$bo = N\frac{\sum \log y}{n} \qquad bo = N\frac{\sum x \log y}{\sum x^2} \qquad r_e = (b_1 - 1) * 100\%$$

$$Kek = \frac{Ostvareno\ vreme\ rada}{Moguće\ vreme\ rada} * 100\%$$

$$Kik = \frac{Ostvarena\ proizvodnja\ po\ jedinici\ kapaciteta}{Moguća\ proizvodnja\ po\ jedinici\ kapaciteta} * 100\%$$

$$Kiik = \frac{Ostvarena\ godišnja\ proizvodnja}{Mogući\ godišnji\ kapacitet} * 100\%$$

$$\overline{C} = \frac{C1Q1 + C2Q2 + \cdots + CnQn}{Q1 + Q2 + \cdots Qn} \qquad \overline{Z} = \frac{\sum Vt}{\sum t} \qquad \beta_o = \frac{Vku}{\overline{Z}} \qquad Vo = \frac{Bd}{\beta o}$$

$$\text{Koeficijent iskorišćenosti sirovina} = \frac{Normirani - stvarni\ utrošak}{Ukupni\ normirani\ utrošak} * 100\%$$

$$\text{Koeficijent fluktuacije} = \frac{Broj\ zamenjenih\ radnika}{Ukupan\ broj\ radnika} * 100\%$$

$$Kirs = \frac{Prosečan\ broj\ zaposlenih\ radnika}{Ukupan\ broj\ zaposlenih\ radnika} * 100\%$$

$$Kird = \frac{Prosečno\ trajanje\ radnog\ dana}{7\ (8)} * 100\%$$

$$Kiirv = \frac{Ostvareni\ efektivni\ časovi\ rada\ radnika}{Mogući\ fond\ časova\ rada\ radnika} * 100\%$$

$$Ii = \frac{yi}{yo} * 100\% \qquad Vi = \frac{yi}{yi-1} * 100\% \qquad Ii' = \frac{Ii}{Io} * 100\%$$

$$Ii=\frac{Ii-1*Vi}{100} \qquad I_{i-1}=\frac{Ii}{Vi}*100\% \qquad Iq=\frac{qi}{qo}*100\%$$

$$Ip=\frac{pi}{po}*100\% \qquad oIq=\frac{\sum qipo}{\sum qopo}*100\% \qquad iIq=\frac{\sum qipi}{\sum qopi}*100\%$$

$$oIq=\frac{\sum\frac{qi}{qo}qopo}{\sum qopo}*100\% \qquad iIq=\frac{\sum qipi}{\sum\frac{qo}{q1}qipi}*100\%$$

$$fIq=(\sqrt{\frac{\sum qipo}{\sum qopo}\frac{\sum qipi}{\sum qopi}})*100\% \qquad oIp=\frac{\sum piqo}{\sum poqo}*100\%$$

$$iIp=\frac{\sum piqi}{\sum poqi}*100\% \qquad oIp=\frac{\sum\frac{pi}{po}qopo}{\sum qopo}*100\%$$

$$iIp=\frac{\sum qipi}{\sum\frac{po}{p1}qipi}*100\% \qquad fIp=(\sqrt{\frac{\sum piqo}{\sum poqo}\frac{\sum piqi}{\sum poqi}})*100\%$$

$$Iqp=\frac{piqi}{poqo}*100\% \qquad Ipq=\frac{\sum piqi}{\sum poqo}*100\%$$

$$Ip=\frac{\sum piq}{\sum poq}*100\% \qquad Ipe(z)=\frac{\sum \overline{xi}}{\sum \overline{xo}}*100\% \qquad \overline{xi}=\frac{xi}{Ri} \qquad \overline{xo}=\frac{xo}{Ro}$$

$$i\bar{X}pl(z)=\frac{\sum xi}{\sum Ri}*100\% \qquad o\bar{X}pl(z)=\frac{\sum xo}{\sum Ro}*100\% \qquad Ipe(z)=\frac{\sum \overline{xi}}{\sum \overline{xo}}*100\%$$

$$I'pe(z)=\frac{\sum Ipe(z)*Ri}{\sum Ri}*100\% \qquad \frac{Ipe(z)}{I'pe(z)}$$

$$G=N\sqrt{\frac{\sum \log L}{n-1}}-100 \qquad \chi^2=\sum\frac{(fi-fi')^2}{fi'}$$

8.2. Tabela T1. NORMALAN RASPORED
(funkcija rasporeda)

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,
0,0	5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0,1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0,2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0,3	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0,4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0,5	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0,6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0,7	7580	7611	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7852
0,8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0,9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1,0	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1,1	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1,2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8990	8997	9015
1,3	9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177
1,4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319
1,5	9332	9345	9357	9370	9382	9394	9406	9418	9429	9441
1,6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1,7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1,8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1,9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767
2,0	9772	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2,1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2,2	9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2,3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2,4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2,5	9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2,6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2,7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2,8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2,9	9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986
3,0	9987	9987	9987	9988	9989	9989	9989	9989	9990	9990
3,1	9990	9991	9991	9991	9992	9992	9992	9992	9993	9993
3,2	9993	9993	9994	9994	9994	9994	9994	9995	9995	9995
3,3	9995	9995	9995	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9997
3,4	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998

8.3. Tabela T2. Kritične vrednosti χ^2 rasporeda

v / α	0,995	0,975	0,95	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005
1	0,00004	0,00098	0,00393	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879
2	0,0100	0,0506	0,103	4,605	5,991	7,378	9,210	10,597
3	0,0717	0,216	0,352	6,251	7,815	9,348	11,345	12,838
4	0,207	0,484	0,711	7,779	9,488	11,143	13,277	14,860
5	0,412	0,831	1,145	9,236	11,070	12,832	15,086	16,750
6	0,676	1,237	1,635	10,645	12,592	14,449	16,812	18,548
7	0,989	1,690	2,167	12,017	14,067	16,013	18,475	20,278
8	1,344	2,180	2,733	13,362	15,507	17,535	20,090	21,955
9	1,735	2,700	3,325	14,684	16,919	19,023	21,666	23,589
10	2,156	3,247	3,940	15,987	18,307	20,483	23,209	25,188
11	2,603	3,816	4,575	17,275	19,675	21,92	24,725	26,757
12	3,074	4,404	5,226	18,549	21,026	23,336	26,217	28,300
13	3,565	5,009	5,892	19,812	22,362	24,736	27,688	29,819
14	4,075	5,629	6,571	21,064	23,685	26,119	29,141	31,319
15	4,601	6,262	7,261	22,307	24,996	27,488	30,578	32,801
16	5,142	6,908	7,962	23,542	26,296	28,845	32,000	34,267
17	5,697	7,564	8,672	24,769	27,587	30,191	33,409	35,718
18	6,265	8,231	9,390	25,989	28,869	31,526	34,805	37,156
19	6,844	8,907	10,117	27,204	30,144	32,852	36,191	38,582
20	7,434	9,591	10,851	28,412	31,410	34,17	37,566	39,997
21	8,034	10,283	11,591	29,615	32,671	35,479	38,932	41,401
22	8,643	10,982	12,338	30,813	33,924	36,781	40,289	42,796
23	9,260	11,688	13,091	32,007	35,172	38,076	41,638	44,181
24	9,886	12,401	13,848	33,196	36,145	39,364	42,980	45,558
25	10,520	13,120	14,611	34,382	37,652	40,646	44,314	46,928
26	11,160	13,844	15,379	35,563	38,885	41,923	45,642	48,290
27	11,808	14,573	16,151	36,741	40,113	43,194	46,963	49,645
28	12,461	15,308	16,928	37,916	41,337	44,461	48,278	50,993
29	13,121	16,047	17,708	39,087	42,557	45,722	49,588	52,336
30	13,787	16,791	18,493	40,256	43,773	46,979	50,892	53,672
35	17,192	20,569	22,465	46,059	49,802	53,203	57,342	60,275
40	20,707	24,433	26,509	51,805	55,758	59,342	63,691	66,766
45	24,311	28,366	30,612	57,505	61,656	65,410	69,957	73,166
50	27,991	32,357	34,764	63,167	67,505	71.420	76,154	79,490
60	35,535	40,482	43,188	74,397	79,082	83,298	88,379	91,952
70	43,275	48,758	51,739	85,527	90,531	95,023	100,425	104,215
80	51,172	57,153	60,391	96,578	101,879	106,629	112,329	116,321
90	59,196	65,647	69,126	107,565	113,145	118,136	124,116	128,299
100	67,328	74,222	77,929	118,498	124,342	129,561	135,807	140,169

8.4. Tabela T3. Kritične vrednosti Studentovog t rasporeda

v α	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005
1	3,078	6,3138	2,706	31,821	63,657
2	1,886	2,9200	4,3027	6,965	9,9248
3	1,638	2,3534	3,1825	4,541	5,8409
4	1,533	2,1318	2,7764	3,747	4,6041
5	1,476	2,0150	2,5706	3,365	4,0321
6	1,440	1,9432	2,4469	3,143	3,7074
7	1,415	1,8946	2,3646	2,998	3,4995
8	1,397	1,8595	2,3060	2,896	3,3554
9	1,383	1,8331	2,2622	2,821	3,2498
10	1,372	1,8125	2,2281	2,764	3,1693
11	1,363	1,7959	2,2010	2,718	3,1058
12	1,356	1,7823	2,1788	2,681	3,0545
13	1,350	1,7709	2,1604	2,650	3,0123
14	1,345	1,7613	2,1448	2,624	2,9768
15	1,341	1,7531	2,1315	2,602	2,9467
16	1,337	1,7459	2,1199	2,583	2,9208
17	1,333	1,7396	2,1098	2,567	2,8982
18	1,330	1,7341	2,1009	2,552	2,8784
19	1,328	1,7291	2,0930	2,539	2,8609
20	1,325	1,7247	2,0860	2,528	2,8453
21	1,323	1,7207	2,0796	2,518	2,8314
22	1,321	1,7171	2,0739	2,508	2,8188
23	1,319	1,7139	2,0687	2,500	2,8073
24	1,318	1,7109	2,0639	2,492	2,7969
25	1,316	1,7081	2,0595	2,485	2,7874
26	1,315	1,7056	2,0555	2,479	2,7787
27	1,314	1,7033	2,0518	2,473	2,7707
28	1,313	1,7011	2,0484	2,467	2,7633
29	1,311	1,6991	2,0452	2,462	2,7564
30	1,310	1,6973	2,0423	2,457	2,7500
140	1,288	1,6558	1,9771	2,353	2,6114
160	1,287	1,6545	1,9749	2,350	2,6070
180	1,286	1,6534	1,9733	2,347	2,6035
200	1,286	1,6525	1,9719	2,345	2,6006
∞	1,282	1,6450	1,96	2,326	2,576