

MATEMATIKA ZA EKONOMISTE (18.06.2020.)

ZADACI

1. Cena banana je od 139 dinara snižena na 119 dinara. Koliko u procentima iznosi sniženje cene? (4)

Rešenje.

$$G = 139, P = 139 - 119 = 20, p = ?$$

$$G : P = 100 : p$$

$$p = \frac{P \cdot 100}{G} = \frac{20 \cdot 100}{139} = 14,388\%$$

2. Cena haljine je od 6290, snižena na 4990 dinara. Nakon drugog sniženja, cena iznosi 3590 dinara. Koliko u procentima iznosi prvo, a koliko drugo sniženje? (8)

Rešenje.

$$G = 6290, G_1 = G - P_1 = 4990$$

$$G : (G - P_1) = 100 : (100 - p_1)$$

$$100 - p_1 = \frac{(G - P_1) \cdot 100}{G} = \frac{4990 \cdot 100}{6290} = 79,33$$

$$p_1 = 100 - 79,33 = 20,67$$

Prvo smanjenje cene je za 20,67%

$$G_2 = G_1 - P_2 = 3590$$

$$G_1 : (G_1 - P_2) = 100 : (100 - p_2)$$

$$100 - p_2 = \frac{(G_1 - P_2) \cdot 100}{G_1} = \frac{3590 \cdot 100}{4990} = 71,94$$

$$p_2 = 100 - 71,94 = 28,06$$

drugo smanjenje cene je za 28,06%

3. Klijentu je zbog kašnjenja pri plaćanju računa za telefon u iznosu od 1530 dinara, zaračunata zatezna kamata u iznosu od 17,92 dinara, po stopi od 9,5%. Koliko dana je klijent kasnio sa uplatom? (4)

Rešenje.

$$K_0 = 1530, I = 17,92, p = 9,5\% = 0,095$$

$$I = K_0 p t, t = \frac{I}{K_0 p} = \frac{17,92}{1530 \cdot 0,095} = 0,1233, t_d = t \cdot 365 = 0,1233 \cdot 365 \approx 45 \text{ dana}$$

4. Koliku kamatu donosi kapital od 10000 eura uložen na 2 godine 9 meseci i 16 dana, sa godišnjom dekurzivnom kamatnom stopom 0,56% i polugodišnjim kapitalisanjem? Koliku kamatu bi doneo da je uložen pod istim uslovima sa anticipativnom kamatnom stopom 0,56%? (10)

Rešenje.

$$K_0 = 10000, t = 2g \ 9m \ 16d = 2 + \frac{9}{12} + \frac{16}{365} = 2,7938, p = 0,56\% = 0,0056, m = \frac{12}{6} = 2,$$

$$I_d = ? \ I_a = ?$$

$$tm = 2,7938 \cdot 2 = 5,588, \text{ za } tm \text{ uzimamo samo celi deo dobijenog broja, pa je } tm = 5 \text{ (2g 6m),}$$

$$t_d = 3 \cdot 30 + 16 = 106$$

$$I = K_s - K_0$$

$$K_s = K_0 \left(1 + \frac{p}{m}\right)^{tm} \left(1 + \frac{p \cdot t_d}{365}\right) = 10000 \left(1 + \frac{0,0056}{2}\right)^5 \left(1 + \frac{0,0056 \cdot 106}{365}\right) = 10157,2782$$

$$I_d = 10157,2782 - 10000 = 157,2782$$

$$K_s = \frac{K_0}{\left(1 - \frac{q}{m}\right)^{tm} \left(1 - \frac{q \cdot t_d}{365}\right)} = \frac{10000}{\left(1 - \frac{0,0056}{2}\right)^5 \left(1 - \frac{0,0056 \cdot 106}{365}\right)} = 10157,7032$$

$$I_a = 10157,7032 - 10000 = 157,7032$$

5. Kredit od 568000 dinara se amortizuje mesečno metodom jednakih anuiteta sa godišnjom dekurzivnom kamatnom stopom od 6,66% za vreme od 3 godine. Izračunati vrednost anuiteta, stanje duga posle isteka prve polovine perioda amortizacije i ukupnu kamatu. (10)

Rešenje.

$$K = 568000, p = 6,66\% = 0,0666, t = 3, r = 1 + \frac{p}{m} = 1 + \frac{0,0666}{12} = 1,00555 \quad a = ? \quad S_{18} = ? \quad I = ?$$

$$a = K \frac{r - 1}{1 - r^{-n}} = 568000 \cdot \frac{1,00555 - 1}{1 - 1,00555^{-36}} = 17450,0285$$

$$S_{18} = K \frac{r^n - r^i}{r^n - 1} = 568000 \frac{1,00555^{36} - 1,00555^{18}}{1,00555^{36} - 1} = 298134,8908$$

$$I = na - K = 36 \cdot 17450,0285 - 568000 = 60201,026$$

6. Koje se od matrica mogu pomnožiti i u kom redosledu? Izračunati moguće proizvode.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = [0 \quad 2 \quad -1], \quad C = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Rešenje.

Mogu se pomnožiti sledeće matrice $A \cdot C, B \cdot A, B \cdot C, C \cdot B, D \cdot A, D \cdot C$

$$A \cdot C = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -9 \\ -19 \end{bmatrix} \quad B \cdot A = [0 \quad 2 \quad -1] \cdot \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix} = [-4 \quad 2 \quad -5]$$

$$B \cdot C = [0 \quad 2 \quad -1] \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = [-3] \quad C \cdot B = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot [0 \quad 2 \quad -1] = \begin{bmatrix} 0 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

$$D \cdot A = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -16 \\ -14 & -4 & 5 \end{bmatrix} \quad D \cdot C = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -17 \end{bmatrix}$$

7. Izračunati determinantu matrice $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ (4)

Rešenje.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{12} + (-4) \cdot A_{13} + 0 \cdot A_{14} = 2 \cdot 2 - 4 \cdot (-6) = -20$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -1 \cdot 6 = -6$$

8. Reši po X matricnu jednačinu $F(2I + X) + E = D$ gde je

$$D = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -2 \\ -1 & 6 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Rešenje.

$$F(2I + X) + E = D$$

$$F(2I + X) = D - E \cdot F^{-1}$$

$$F^{-1}F(2I + X) = F^{-1}(D - E)$$

$$I(2I + X) = F^{-1}(D - E)$$

$$2I + X = F^{-1}(D - E)$$

$$X = F^{-1}(D - E) - 2I$$

$$F^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 30 & 15 & -27 \\ -1 & 0 & 1 \\ -6 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$D - E = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -2 \\ -1 & 6 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F^{-1}(D - E) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 30 & 15 & -27 \\ -1 & 0 & 1 \\ -6 & -3 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & 75 & -30 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -15 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 25 & -10 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 25 & -10 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -5 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 25 & -10 \\ 0 & -\frac{7}{3} & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

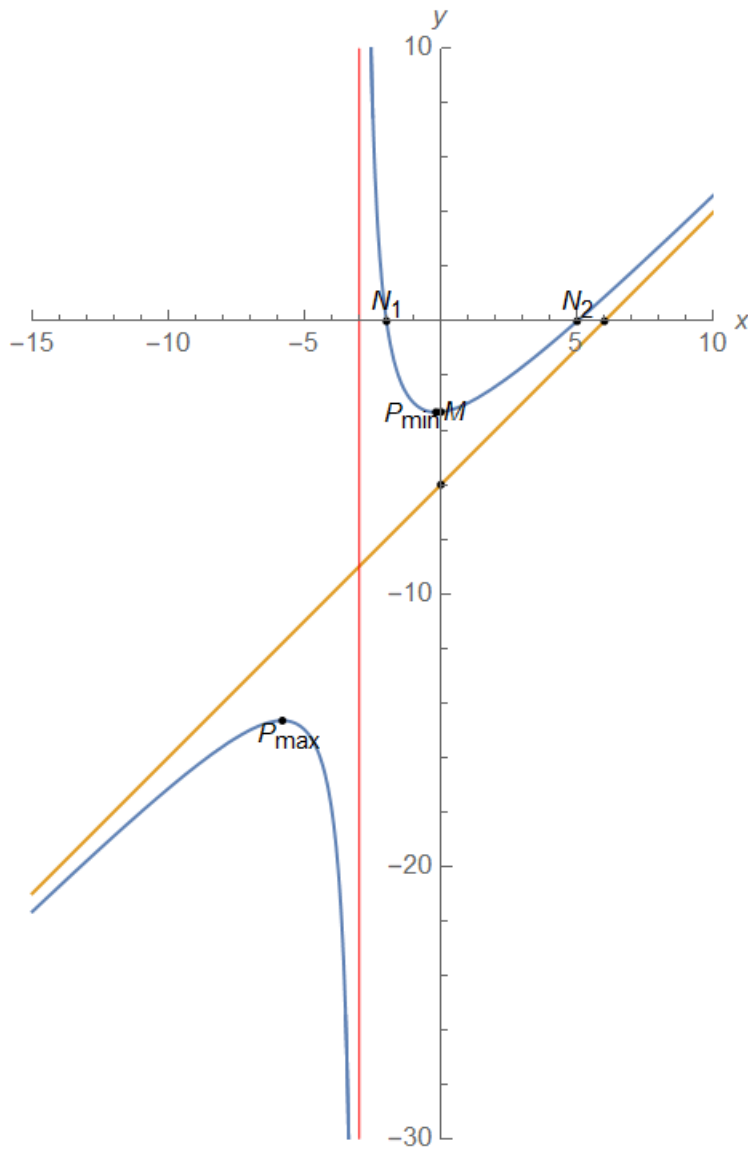
9. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije:

$$y = \frac{x^2 - 3x - 10}{x + 3} \quad (40)$$

Rešenje.

$$1) \quad x + 3 \neq 0, x \neq -3, Df = (-\infty, -3) \cup (-3, +\infty)$$

$$\begin{array}{cccccccc}
 - & - & - & - & + & + & + & + & + \\
 \hline
 & & & -3 & & & & & \\
 & \frown & & & \smile & & & &
 \end{array}
 \quad y'' = \frac{16}{(x+3)^3}$$



10. Tražnja na tržištu za nekim proizvodom izražena je funkcijom $x = -p^2 + 120p - 575$, a ponuda ovog proizvoda data je funkcijom $\tilde{x} = p^2 + 117p - 8350$.
- odrediti oblasti definisanosti funkcija tražnje i ponude;
 - odrediti tržišnu cenu p_0 (cenu pri kojoj se postiže ravnoteža na tržištu). (10)

Rešenje.

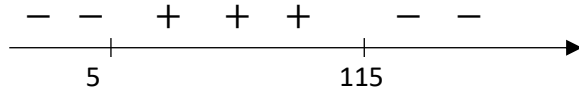
- Uslovi za određivanje oblasti definisanosti funkcije tražnje:
 $p > 0$ i $x = f(p) > 0$ i $x' = f'(p) < 0$.

$$-p^2 + 120p - 575 = 0$$

$$p_{1,2} = \frac{-120 \pm \sqrt{120^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-575)}}{2 \cdot (-1)}$$

$$p_1 = 5, p_2 = 115$$

znak funkcije tražnje



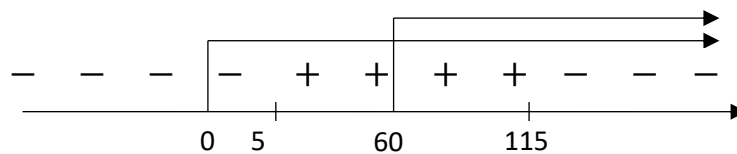
$$x' = (-p^2 + 120p - 575) = -2p + 120$$

$$-2p + 120 < 0$$

$$-2p < -120$$

$$p > \frac{-120}{-2}$$

$$p > 60$$



Oblast definisanosti funkcije tražnje je $Df = (60, 115)$, jer su sva tri uslova ispunjena na tom intervalu.

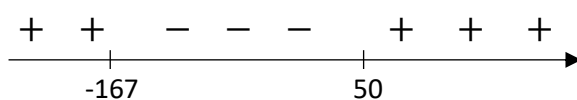
Uslovi za određivanje oblasti definisanosti funkcije ponude:

$$p > 0 \text{ i } \tilde{x} = g(p) > 0 \text{ i } \tilde{x}' = g'(p) \geq 0.$$

$$p^2 + 117p - 8350 = 0$$

$$p_{1,2} = \frac{-117 \pm \sqrt{117^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8350)}}{2 \cdot 1}$$

$$p_1 = -167, p_2 = 50$$

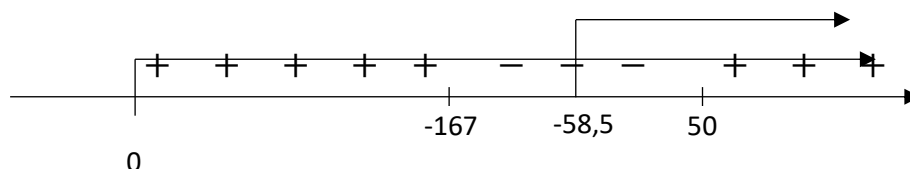


$$\tilde{x}' = (p^2 + 117p - 8350)' = 2p + 117$$

$$2p + 117 \geq 0$$

$$2p \geq -117$$

$$p \geq -58,5$$



Oblast definisanosti funkcije ponude je $Df = (50, +\infty)$, jer su na ovom intervalu ispunjena sva tri uslova.

b) Uslov ravnoteže na tržištu je $x = \tilde{x}$ odnosno da je tražnja jednaka ponudi.

Presek oblasti definisanosti obe funkcije je $(60, 115) \cap (50, +\infty) = (60, 115)$.

$$f(p) = g(p)$$

$$f(p) - g(p) = 0$$

$$-p^2 + 120p - 575 - (p^2 + 117p - 8350) = 0$$

$$-p^2 + 120p - 575 - p^2 - 117p + 8350 = 0$$

$$-2p^2 + 3p + 7775 = 0$$

$$p_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 7775}}{2 \cdot (-2)}$$

$$p_1 = -61,6 \quad p_2 = 63,1$$

Prvo rešenje ne pripada oblasti definisanosti ni funkcije tražnje ni funkcije ponude, dok drugo rešenje pripada i jednoj i drugoj oblasti definisanosti, pa je **tržišna cena $p_0 = 63,1$** .

11. $x = -p + 21000$ je funkcija tražnje, a $T(x) = x^2 + 9000x + 2\,875\,000$ funkcija ukupnih troškova za neki proizvod X . Odrediti interval rentabilnosti i optimalni obim proizvodnje. Koliko iznosi maksimalna dobit? (10)

Rešenje.

Najpre formiramo funkciju prihoda i za nju nam je potrebna inverzna funkcija tražnje.

$$x = -p + 21000 = f(x)$$

$$p = -x + 21000 = f^{-1}(x)$$

$$P(x) = x \cdot p = x \cdot f^{-1}(x) = x(-x + 21000) = -x^2 + 21000x$$

$$D(x) = P(x) - T(x) = -x^2 + 2100x - (x^2 + 9000x + 2\,875\,000)$$

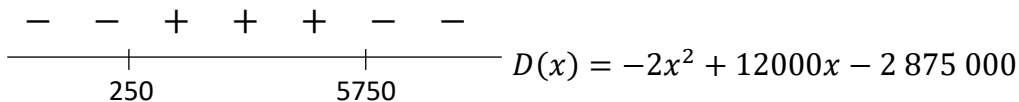
$$D(x) = -x^2 + 21000x - x^2 - 9000x - 2\,875\,000$$

$$D(x) = -2x^2 - 12000x - 2\,875\,000$$

$$-2x^2 + 12000x - 2\,875\,000 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{6900 \pm \sqrt{12000^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-2\,875\,000)}}{2 \cdot (-2)}$$

$$x_1 = 250 \quad x_2 = 5750$$

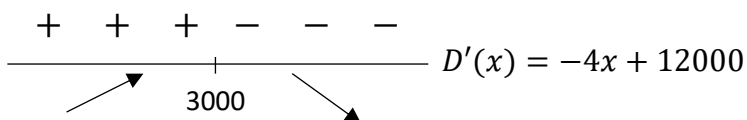


interval rentabilnosti je (250, 5750)

$$D'(x) = (-2x^2 + 12000x - 2\,875\,000)' = -4x + 12000$$

$$-4x + 12000 = 0$$

$$x = 3000$$



optimalni obim proizvodnje je $x_0 = 3000$

$$D_{max} = D(3000) = -2 \cdot 3000^2 + 12000 \cdot 3000 - 2\,875\,000 = 15\,125\,000$$

12. $\bar{T}(x) = 0,5x + 150 + \frac{180\,000}{x}$ je funkcija prosečnih troškova za neki proizvod . Da li je opravdano povećati proizvodnju sa nivoa $x_0 = 1000$? Odrediti nivo proizvodnje pri kojem se postižu minimani prosečni troškovi. (10)

Rešenje.

$$T(x) = x \cdot \bar{T}(x) = x \left(0,5x + 150 + \frac{180\,000}{x} \right) = 0,5x^2 + 150x + 180\,000$$

$$T_G(x) = T'(x) = (0,5x^2 + 150x + 180\,000)' = 2 \cdot 0,5x + 150 = x + 150$$

$$\bar{T}(1000) = 0,5 \cdot 1000 + 150 + \frac{180\,000}{1000} = 830$$

$$T_G(1000) = 1000 + 150 = 1150$$

$T_G(1000) > \bar{T}(1000)$ što znači da bi povećanje proizvodnje sa nivoa dovelo do porasta prosečnih troškova, pa nije ekonomski opravdano povećavati proizvodnju.

$$T_G(x) - \bar{T}(x) = 0$$

$$x + 150 - \left(0,5x + 150 + \frac{180\,000}{x}\right) = 0$$

$$x + 150 - 0,5x - 150 - \frac{180\,000}{x} = 0$$

$$0,5x - \frac{180\,000}{x} = 0$$

$$\frac{0,5x^2 - 180\,000}{x} = 0$$

$$0,5x^2 - 180\,000 = 0$$

$$0,5x^2 = 180\,000$$

$$x^2 = \frac{180\,000}{0,5}$$

$$x^2 = 360\,000$$

$$x = \pm 600$$

Minimalni prosečni troškovi se postižu pri nivou proizvodnje $x_0 = 600$.

PITANJA (zaokruži tačna tvrđenja) (20)

1. Kod anticipativnog načina obračuna kamate:
 - a) kamata se zaračunava na početnu vrednost kapitala za posmatrani obračunski period
 - b) kamata se zaračunava na krajnju vrednost kapitala za posmatrani obračunski period**
 - c) kamata se isplaćuje na kraju svakog obračunskog perioda
 - d) kamata se isplaćuje na početku svakog obračunskog perioda.**

2. Kod kredita ja jednakim anitetima:
- najveće je učešće kamate u prvom, najmanje u poslednjem anuitetu**
 - najveće je učešće otplate u prvom, najmanje u poslednjem anuitetu
 - najmanje je učešće otplate u prvom, najveće u poslednjem anuitetu**
 - učešće otplate je jednako u svim anuitetima
3. Zaokruži tačna tvrđenja:
- $A \cdot B = B \cdot A$;
 - $A + B = B + A$;**
 - $A^3 = 3A$;
 - $A + O = A$;**
 - $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$;**
4. Prava $y = b$ je horizontalna asimptota funkcije $f(x)$ ako je:
- $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \infty$, b) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, c) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$.
5. Neka su $f(x)$ i $g(x)$ realne funkcije, definisane u okolini tačke x i diferebcijablne u tački x . Tada važe sledeća pravila za diferenciranje
- $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) + g'(x)$
 - $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{g'(x)}$
 - $(\alpha f(x))' = \alpha f'(x)$**
 - $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$**
6. Kada cena neke robe na tržištu raste onda:
- raste tražnja za tim proizvodom
 - opada tražnja za tim proizvodom**
 - opada ponuda tog proizvoda
 - raste ponuda tog tog proizvoda.**
7. Sa porastom obima prozvodnje:
- rastu varijabilni troškovi**
 - rastu fiksni troškovi
 - rastu ukupni troškovi**

8. Objasni razliku između prostog i složenog kamatnog računa.

Kod prostog kamatnog računa, kamata se zaračunava jedanput, na kraju vremenskog perioda. Kamata je proporcionalna početnoj vrednosti kapitala, kamatnoj stopi i vremenu. Prost kamatni račun se primenjuje kod kratkoročnih novčanih transakcija, na primer kod računanja zatezne kamate.

Kod složenog kamatnog računa kamata se računa za svaki obračunski period. Kamata za jedan obračunski period, dodaje se počenoj vrednosti kapitala za taj period i tako uvećana vrednost predstavlja početnu vrednost kapitala za sledeći obračunski period. Ovakav način obračuna kamate poznat je u praksi kao računanje „kamate na kamatu“.